Министерство общего и профессионального образования
Свердловской области

Муниципальный орган
«Управление образования городского округа Краснотурьинск»

Предмет: математика
Направление: физико-математическое

Эта удивительная клетчатая бумага

г. Краснотурьинск

2011 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Участвуя в Российском заочном конкурсе «Познание и творчество» г. Обнинска, Международном конкурсе - игре «Кенгуру», Молодежном математическом чемпионате г. Пермь и олимпиаде Уральского Федерального округа часто сталкиваюсь с задачами, в которых нужно вычислить площадь фигуры. Проблемы, возникающие при решении таких задач, вызваны как сложностью, так и тем, что в школе им уделяется мало времени. А порой их решение носит творческий характер.

Выполняя задания для поступления в Федеральную заочную физико-техническую школу при Московском физико-техническом государственном университете, мне встретилась задача, для решения которой потребовалось много времени. Вот условие этой задачи:

Введите на клетчатой бумаге систему координат. Отметьте точки А(-2;7), В(1;-2), С(-4;-7), Д(2;-5), Е(3;-8), F(5;-4), G(14;-1), Н(8;2), К(11;8), L(6;3) и соедините их последовательно отрезками АВ, ВС, СД, ДЕ, EF, FG, GH, НК, KL, LA. Найдите площадь полученной фигуры.

В 2009 – 2010 учебном году, став призером конкурса – игры «Кенгуру», мне был прислан восьмой выпуск серии «Библиотечка клуба «Кенгуру». В нем рассказывается о формуле Пика, которая позволяет находить площади любых многоугольников с вершинами в узлах клетчатой бумаги.

Мой проект посвящен клетчатой плоскости, то есть бесконечному листку бумаги, расчерченному на квадратики. Казалось бы, что увлекательного можно найти на обыкновенном клетчатом листочке? Не судите поспешно!

При написании этой работы я поставила перед собой цель: научиться вычислять площади многоугольников с вершинами в узлах клетки. Для достижения поставленной цели мне потребовалось решить следующие задачи:

1. Изучить литературу по данной теме;
2. Рассмотреть различные способы вычислений площадей многоугольников;
3. Показать практическое применение этих способов;
4. Выяснить преимущества и недостатки каждого способа;
5. Систематизировать и углубить накопленные мной знания;
6. Повысить качество знаний и умений;
7. Интеллектуально развиться.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Австрийский математик Георг Александер Пик родился 10 августа 1859 году в Вене. Его отец, будучи руководителем частного института, предпочел до 11 лет обучать мальчика на дому, а потом отдал его сразу в четвертый класс гимназии, окончив которую в 1875 году, Г.А Пик поступил в Венский университет.

После защиты диссертации его утверждают на должность ассистента одного из ведущих физиков того времени, профессора Эрнста Маха, являющегося одновременно ректором Карлова университета в Праге – старейшего учебного заведения во всех славянских странах. Постоянно, за исключением поездки в Лейпциг для обучения под руководством Феликса Клейна в 1884-1885 годах, Пик живет и работает в Праге.

В 1900-1901 годах Г.А.Пик был деканом философского факультета Карлова университета, и в 1911 году Пик оказался во главе комиссии, которая приняла на кафедру математической физика Альберта Эйнштейна. Они становятся близкими друзьями, совершая продолжительные пешие прогулки и беседуя, вместе музицируют.

Среди всего многообразия достижений австрийского математика выделяется формула для вычисления площадей многоугольников с вершинами в узлах клетки. Она стала широко известна только в 1969 году, после того, как Гуго Штейнгауз включил ее в свою знаменитую книгу «Математический калейдоскоп».

После выхода в 1927 году на пенсию Пик вернулся в свой родной город Вену. Однако после аншлюса (присоединение) 12 марта 1938 года Австрии с Германией ему снова пришлось перебраться в Прагу. В сентябре 1938 года фашистская Германия вторглась на территорию Чехословакии. Г.А.Пик был брошен в концентрационный лагерь в Терзинштадте, где и умер две недели спустя.

ФОРМУЛА ПИКА

Многоугольник без самопересечений называется решётчатым, если все его вершины находятся в точках с целочисленными координатами (в декартовой системе координат).

Линии, идущие по сторонам клеток, образуют на нем сетку, а вершины клеток – узлы этой сетки.

Найдем площадь многоугольника с вершинами в узлах (рис.1). Искать ее можно по-разному.

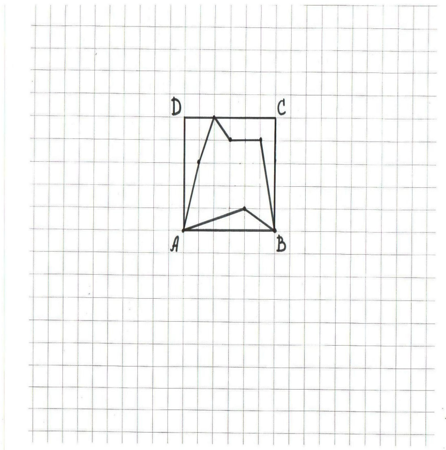


Рис.1

1 способ: с помощью палетки.

2 способ: попробовать разрезать многоугольник на достаточно простые фигуры, найти их площади и сложить. Однако, это очень хлопотно!

3 способ: вычислю площадь заштрихованной фигуры (рис.2), которая «дополняет» многоугольник до прямоугольника АВСД, и вычту эту площадь из площади АВСД. Заштрихованная фигура (в отличие от исходного многоугольника) легко разбивается на прямоугольники и прямоугольные треугольники, так что ее площадь вычисляется без усилий. Она равна:

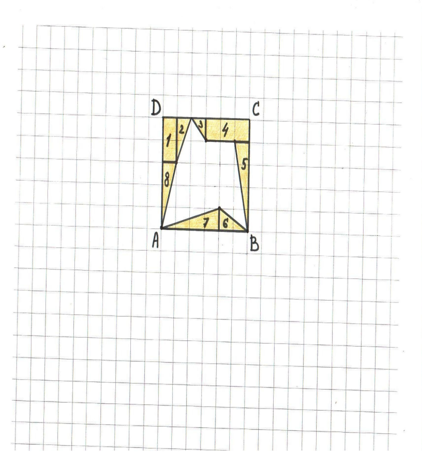


Рис. 2

1·2+0,5·1·2+0,5·1·1+1·3+0,5·1·4+0,5·1·2+0,5·1·4+0,5·1·3=13 кв.ед.

Следовательно, площадь исходного многоугольника равна 5·6-13=17 кв.ед.

Хотя многоугольник и выглядел достаточно просто, для вычисления его площади мне пришлось изрядно потрудиться. Оказывается, площади многоугольников, вершины которых расположены в узлах сетки, можно вычислять гораздо проще: есть формула, связывающая площадь такого многоугольника с количеством узлов, лежащих внутри и на границе многоугольника.

Пусть дан некоторый решётчатый многоугольник, с ненулевой площадью. Обозначим его площадь через S; количество точек с целочисленными координатами, лежащих строго внутри многоугольника — через В; количество точек с целочисленными координатами, лежащих на сторонах многоугольника — через Г.

Тогда справедлива формула –S=В+Г:2-1, которую открыл и доказал австрийский математик Георг Александр Пик в 1899 году (1859-1943)

Докажем ее.

Доказательство проведу в несколько этапов: от самых простых фигур до произвольных многоугольников:

1.Единичный квадрат. В самом деле, для него S=1, В=0, Г=4, и формула верна.

2.Прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат. Для доказательства формулы обозначу через a и b длины сторон прямоугольника.

Тогда нахожу: $S = ab$, В = (a-1)(b-1), Г=2(a+b). Непосредственной подстановкой убеждаюсь, что формула Пика верна.

3. Любой треугольник, расположенный на клетчатой бумаге, внутри которого нет узлов, а на его границе узлами являются только вершины треугольника, имеет площадь 0,5 кв.ед. Такие треугольники называются примитивными. Следовательно, справедливо следующее утверждение:

Все примитивные треугольники равновелики и их площади равны половине площади единичного квадрата.

Множество примитивных треугольников разнообразно (рис.3).

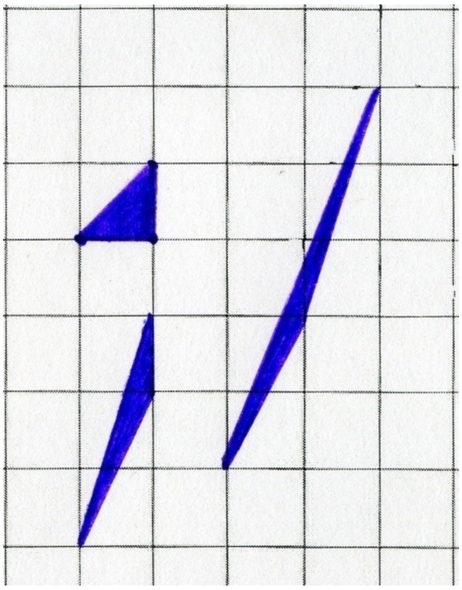


Рис.3

4. Прямоугольный треугольник с катетами, параллельными осям координат. Для доказательства замечу, что любой такой треугольник можно получить отсечением некоторого прямоугольника его диагональю. Обозначу через c число целочисленных точек, лежащих на диагонали. Формула Пика выполняется для такого треугольника, независимо от значения c.

5.Произвольный треугольник. Замечу, что любой такой треугольник может быть превращён в прямоугольник приклеиванием к его сторонам прямоугольных треугольников с катетами, параллельными осям координат (при этом понадобится не более 3 таких треугольников). Отсюда можно получить корректность формулы Пика для любого треугольника.

6.Произвольный многоугольник. Для доказательства разобью на треугольники с вершинами в целочисленных точках. Для одного треугольника формулу Пика я уже доказала. Дальше, можно доказать, что при добавлении к произвольному многоугольнику любого треугольника формула

Пика сохраняет свою корректность. Отсюда следует, что она верна для любого многоугольника.

Связь между площадью фигуры и количеством узлов, попавших в эту фигуру, особенно ясно видна в случае прямоугольника. Пусть АВСД – прямоугольник с вершинами в узлах и сторонами, идущими по линиям сетки (рис.4).

Смещу сетку на полклетки вправо и полклетки вниз. Тогда территорию прямоугольника можно разделить между узлами следующим образом: каждый из В (внутренних узлов) контролирует целую клетку смещенной сетки, каждый из (Г-4) (граничных не угловых узлов) – половину клетки, и каждая из 4 точек А, В, С, Д – четверть клетки.

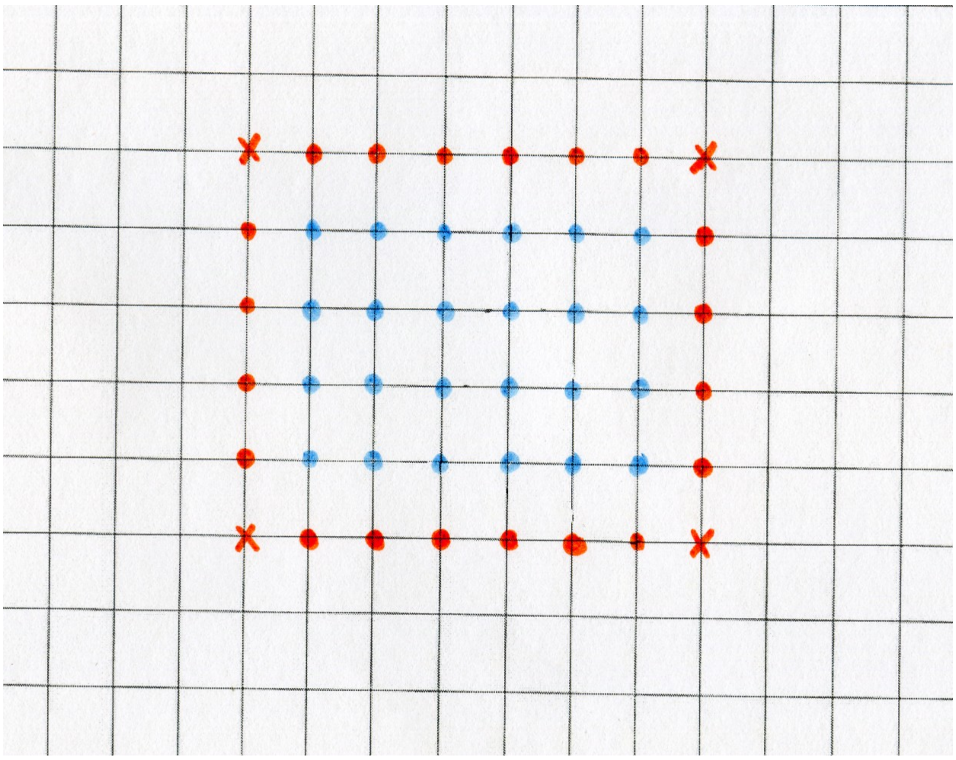


Рис.4

Поэтому площадь прямоугольника S равна:

S=В+Г-42+4·14=В+Г2-1.

Это равенство можно доказать другим способом. Если стороны прямоугольника равны а и в (рис.5), то его площадь равна S=ав, число внутренних узлов равно В=(а-1)(в-1), а граничных – Г=2(а+в).

В+Г:2-1=(а-1)(в-1)+(а+в)-1=ав-а-в+1+а+в-1=ав=S

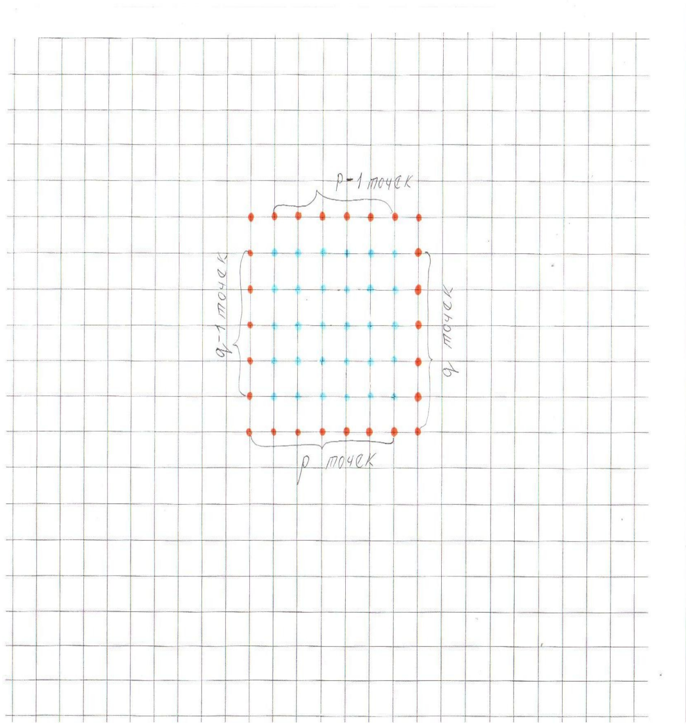


Рис.5

Ценность этой формулы для вычисления площадей прямоугольников очень невелика. Но эта формула верна не только для прямоугольников, а и для произвольных многоугольников с вершинами в узлах сетки.

Легко убедиться в справедливости этой формулы для многоугольников, изображенных на рис.6.

1) S=1+6:2-1=3 кв.ед.

2) S =2+9:2-1=5,5 кв.ед.

3) S=3+3:2-1=3,5 кв.ед.

4) S=2+5:2-1=3,5 кв.ед.

5) S =0+19:2-1=8,5 кв.ед.

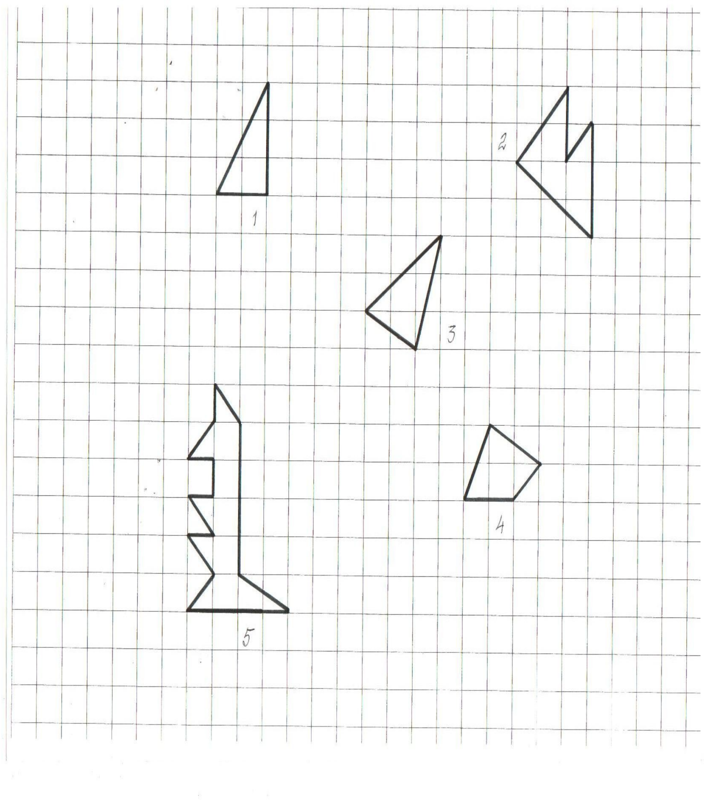


Рис. 6

Пусть многоугольник М разрезан на многоугольники М1и М2 с вершинами в узлах. Докажу, что SM=SM1+SM2.

Доказательство. Рассмотрим рис.7. Пусть многоугольник АДЕВСКР (многоугольник М) разрезан отрезком АВ на два многоугольника: АВСКР (М1) и АВЕД (М2). Сосчитаю внутренние и граничные узлы каждого многоугольника. Если узел внутренний для М и не лежит на отрезке АВ (как, например, точка Н), то он внутренний или для М1 или для М2, поэтому его «вклад» в выражение SM и в сумму SM1+SM2 одинаков.

Одинаковым будет и «вклад» каждого узла, не лежащего на отрезке АВ

(например, Д): он равен 12 .

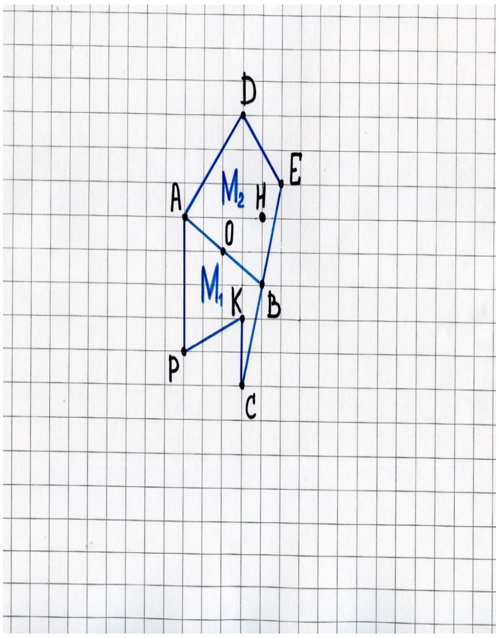


Рис.7

Осталось рассмотреть узлы, лежащие на отрезке АВ. Если такой узел лежит между А и В (как, например, точка О), то для многоугольника М он

внутренний, а для многоугольниковМ1и М2 - граничный. Поэтому его «вклад» в SM равен 1, а в каждое из выражений $SM1+SM2$– по 0,5. Замечу,

что «вклады» такого узла в Sм и $SM1+SM2$равны.

Наконец, рассмотрю узлы А и В. Они граничные как для М, так и для $M1$, $M2$. Поэтому, «вклад» каждого из этих узлов в SM равен 12 , а в $SM1+SM2$ - единице. Значит, суммарный «вклад» узлов А и В в SM равен 1, что на 1 меньше, чем их «вклад» в $SM1+SM2$.

Но SM=BM+ГM2-1, а SM1+SM2=BM1+ГM12-1+BM2+ГM22-1=BM1+BM2+ГM12+ГM22-2,

Так что в SMиз общего «вклада» всех узлов вычитается 1, а в

(Sм1+Sм2) вычитается 2, и это компенсирует разницу «вкладов» узлов А и В.

Итак, Sм=SM1+SM2.

Представлю, что многоугольник M с вершинами в узлах сетки можно

разрезать на k многоугольников M1,M2,...,Mk, каждый из которых также

имеет вершины в узлах сетки (рис.8).

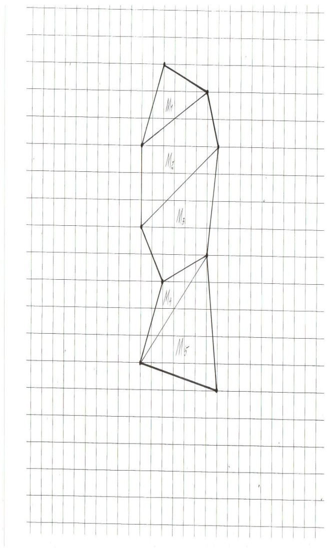


Рис. 8

Если я буду выполнять это разрезание шаг за шагом: сначала отрежу

M1, потом M2, и так далее, до Mk-1, то на каждом шаге я смогу воспользоваться формулой Пика. В результате получу равенство SM=

SM1+SM2+…+SMk.

Докажу формулу Пика для прямоугольного треугольника с вершинами в узлах сетки и катетами, лежащими на линиях сетки.

Рассмотрю такой треугольник АВС и дострою его до прямоугольника АВСД (рис.9).

Для прямоугольников формула Пика верна, т.е SАВСД=ПАВСД.

Следовательно: SАВСД=SАВС+SАСД. Очевидно, что SАВС=SАСД. Поэтому:

SАВСД=2SАВС.

SABC=12SABCД=12·2SABC=ПABC.

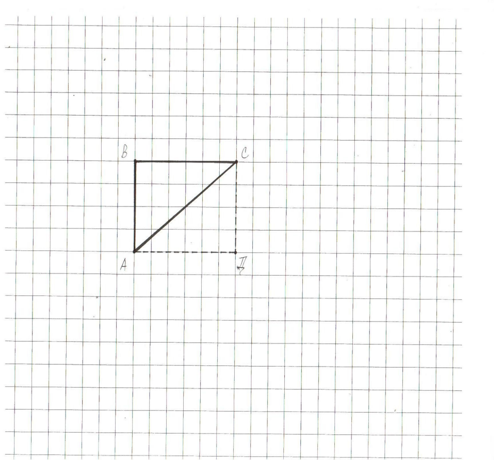


Рис. 9

Докажу формулу Пика для произвольного треугольника с вершинами в узлах сетки.

Любой такой треугольник можно получить, «отрезав» от некоторого прямоугольника со сторонами, идущими по линиям сетки, несколько прямоугольников и прямоугольных треугольников с катетами на линиях сетки (рис.10).

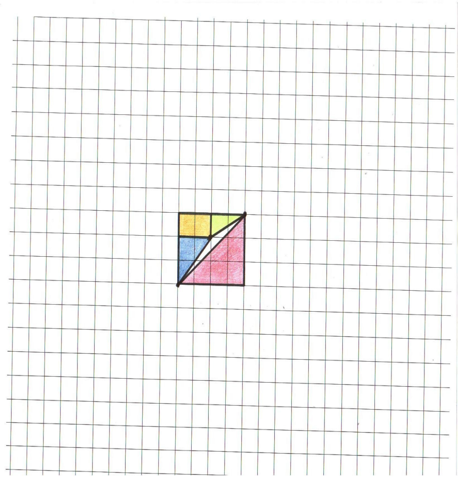


Рис. 10

А так как формула Пика верна для таких прямоугольников и прямоугольных треугольников, то она верна и для исходного треугольника.

Если многоугольник можно разрезать на треугольники с вершинами в узлах сетки, то для него верна формула Пика.

У меня возник вопрос: а всякий ли многоугольник с вершинами в узлах можно разрезать на такие треугольники?

Если все углы многоугольника меньше 180°, т.е. многоугольник выпуклый, то его можно разрезать на треугольники, например, проведя диагонали, соединяющие одну из его вершин со всеми остальными (рис.11)

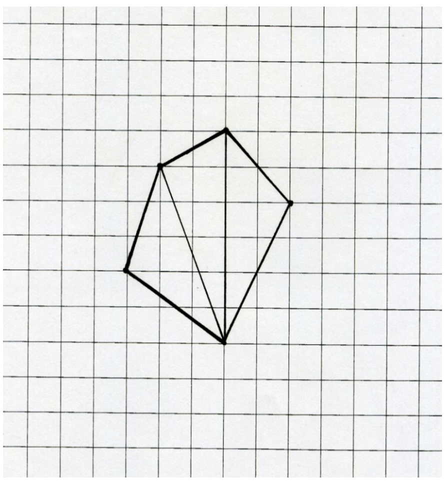


Рис. 11

Следовательно, формула Пика верна для всех выпуклых многоугольников.

Опять вопрос: а выполняется ли формула Пика для невыпуклых многоугольников? Доказательство этого факта оказалось слишком сложным. Я решила на конкретных примерах проверить формулу Пика для таких многоугольников (рис.12).

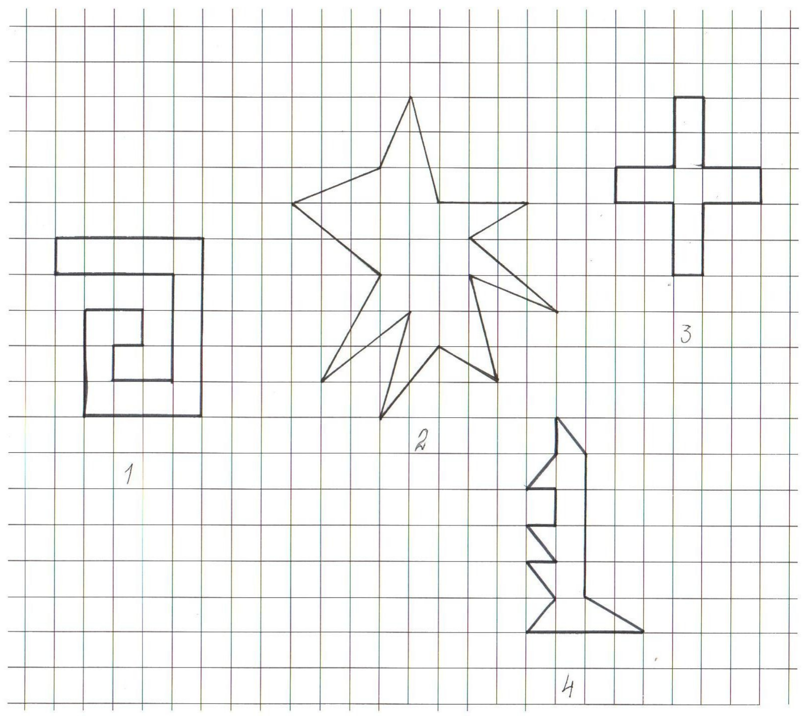


Рис. 12

<u>Решение:</u>

1) S=0+32:2-1=15 кв.ед

2) S=18+17:2-1=25,5 кв.ед

3) S=0+20:2-1=9 кв.ед

4) S =0+19:2-1=8,5 кв.ед

УЗЛЫ НА ОТРЕЗКЕ

Неудобство формулы Пика состоит в том, что уж очень четким должен быть чертеж и очень внимательно нужно его рассматривать, чтобы определить, лежит ли данный узел внутри фигуры или же попал на ее границу. Как точно сосчитать число узлов на границе? Поскольку граница состоит из отрезков, то меня заинтересовал вопрос о количестве узлов сетки, лежащих на произвольном отрезке с концами в узлах.

Пусть А и В – узлы сетки. Обозначу через С1 первый узел, встретившийся после А на отрезке АВ (значит, между точками А и С1 больше узлов нет). Построю прямоугольный треугольник АС1Д1 с гипотенузой АС1 и катетами, лежащими на линиях сетки (рис.13).

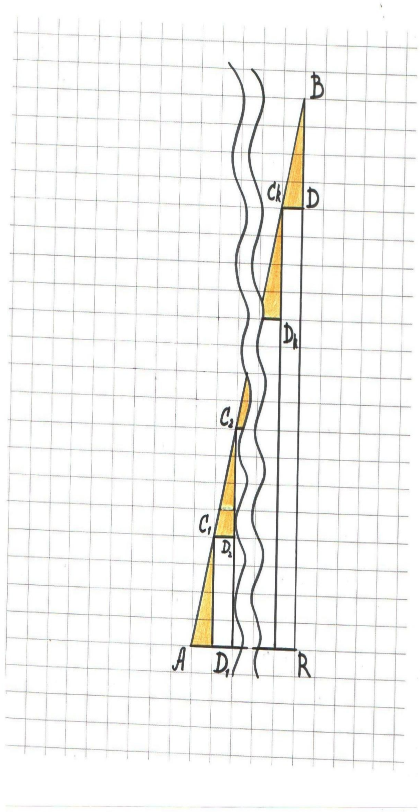


Рис.13

Если C1≠B, то смещу этот треугольник вдоль отрезка AB на расстояние

AC1. Получу равный ему треугольник C1C2Д2. Следовательно, C2- узел, и между С1 и С2нет узлов. Ясно, что если эту процедуру продолжить, то когда–нибудь в качестве очередной точки Ck+1 можно получить точку В – узел сетки. Рассматривая большой прямоугольный треугольник ARB с гипотенузой АВ, прихожу к выводу:

AR=(k+1)АД1, BR=(k+1)С1Д1, AB=(k+1) AC1 (*)

Сколько же узлов лежит между точками А и В (считаем, что А и В не лежат на одной линии сетки). Построю прямоугольный треугольник ARB с вершинами в узлах сетки и с гипотенузой АВ (рис.14). Пусть AR =p, BR=q. Очевидно, что p и q – целые положительные числа.

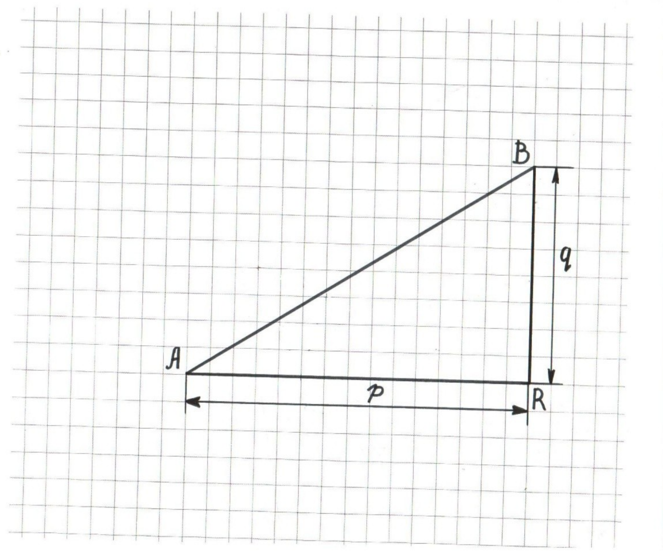


Рис. 14

Теорема. Если p и q- взаимно просты, то между A и B на отрезке AB нет узлов сетки. Если же наибольший общий делитель p и q равен n, где n>1(НОД (p, q)= n>1), то на отрезке AB между точками A и B расположено ровно (n-1) узлов сетки.

Доказательство:

1) Пусть числа p и q взаимно просты. Если между A и B были k узлов

($k\geq 1$), то, взяв ближайший узел к A узел C1, получу по формулам (*):

p=(k+1)АД1, q=(k+1)C1Д1, т.е. p и q имеют общий делитель (k+1), больший 1. Но ведь они взаимно просты.

2) Пусть НОД(p, q)= n>1. Поделю отрезок AR и BR на n равных частей,

опять прихожу к рис.10, $C1, C2, \ldots, Ck$- какие-то узлы сетки и k=n-1. Таким

образом в этом случае между точками A и B есть хотя бы n-1 узел. Следовательно, если самый большой общий делитель чисел p и q равен n, то между A и B ровно n-1 узел. Зная, это, можно не мучаясь сомнениями с уверенностью сказать, через сколько узлов проходит произвольный отрезок с концами в узлах сетки.

Сколько клеток рассекает на две части диагональ прямоугольника m x n, где m и n взаимно простые числа?

Замечу, что диагональ такого прямоугольника не проходит через узлы. Буду считать, что диагональ идет из левого нижнего угла прямоугольника. Самой первой она рассекает левую нижнюю угловую клетку (клетку №1), потом она попадает в клетку №2 (рис.15), и так далее.

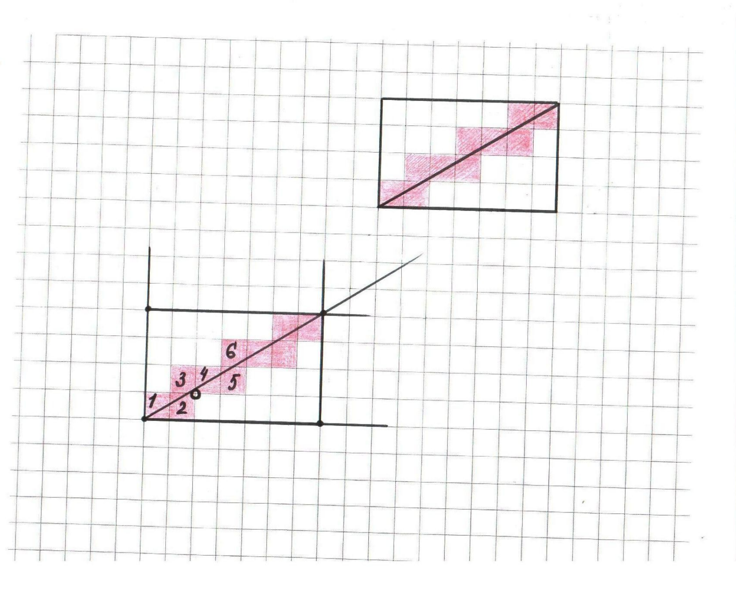


Рис. 15

Пусть диагональ уже пересекла k клеток. Так как она ни разу не проходит через узел, то всегда можно однозначно указать, какую клетку она рассечет после клетки с номером k.

Итак, я получила «цепочку», идущую из левого нижнего угла в правый верхний. Мне необходимо понять, чему равно число клеток в этой цепочке. Дам каждой клетке адрес (t;s), если она расположена в горизонтальном ряду с номером t , и вертикальном ряду с номером s. Левый нижний угол получает адрес (1;1) а правый верхний – (m;n). Замечаю, что при переходе от клетки с номером k в нашей цепочке к клетке с номером k+1 сумма чисел t и s в адресе возрастает точно на 1. Значит, чтобы перейти от клетки с адресом (1;1) к клетке с адресом (m;n), надо сделать ровно m+n-2 шагов, пройдя, таким образом, m+n-1 клеток.

Пусть m и n-произвольные натуральные числа. Сколько клеток рассекает диагональ прямоугольника m x n?

Пусть d – НОД (m;n). Очевидно, что вдоль диагонали исходного

прямоугольника образуется d маленьких прямоугольников md x nd. Стороны

этих маленьких прямоугольников уже взаимно просты, поэтому их

диагонали рассекают по md+nd -1 клеток каждая. Значит, диагональ

исходного прямоугольника рассечет (md+nd -1)d=m+n-d клеток.

В прямоугольнике m x n диагональ рассекает m + n- НОД(m;n) клеток.(**)

Например, если m и n взаимно просты – то m+n-1 клеток.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

1. ***В прямоугольнике 4x7, нарисованном на клетчатой бумаге, провели диагональ. Сколько клеточек она разрезала?***

<u>Решение.</u>

1 способ: Глядя на рис. 16 легко сосчитать, просто водя пальцем.

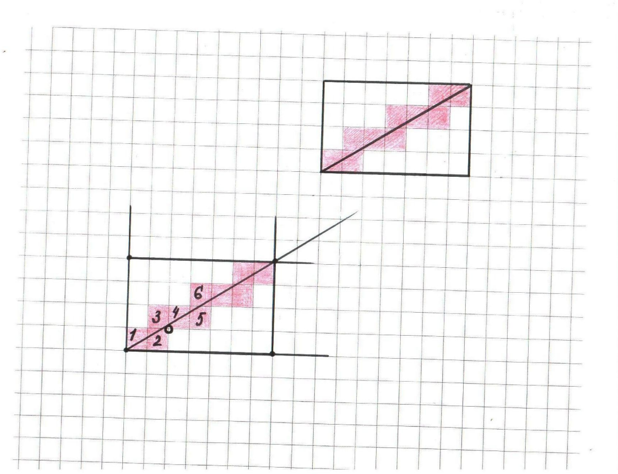


Рис.16

2 способ: Или применяя утверждение (**): 4+7-1=10

<u>Ответ.</u>10 клеток

2. ***В прямоугольнике размером 200х300, нарисованном на клетчатой бумаге, провели диагональ. Сколько клеточек она разрезала на 2 части?***

Решение.

1 способ: Вдоль диагонали прямоугольника 200х300 можно расположить 100 прямоугольников 2х3, и в каждом из них диагональ будет рассекать по 4 клетки.

2 способ: Применяя утверждение (**) 200+300-НОД(200;300)=500-100=400

Ответ. 400 клеток

3. ***В прямоугольнике 1000х1003, нарисованном на клетчатой бумаге, провели диагональ. Сколько клеточек она разрезала на 2 части?***

Решение.

Применяя утверждение (**), получу 1000+1003-1=2002.

Ответ. 2002 клеток

4. ***Шахматный король обошел доску 8×8 клеток, побывав на каждом поле ровно один раз и последним ходом вернувшись на исходное поле. Ломаная, соединяющая последовательно центры полей, которые проходил король, не имеет самопересечений. Какую площадь может ограничивать эта ломаная? (Сторона клетки равна 1.)***

Из формулы Пика сразу следует, что площадь, ограниченная ломаной, равна $64/2 - 1 = 31$; здесь узлами решетки служат центры 64 полей и, по условию, все они лежат на границе многоугольника. Таким образом, хотя таких траекторий короля достаточно много, но все они ограничивают многоугольники равных площадей.

5. ***Середины сторон квадрата соединены отрезками с вершинами. Найти площадь восьмиугольника и отношение площади квадрата к площади восьмиугольника, образованного проведенными отрезками.***

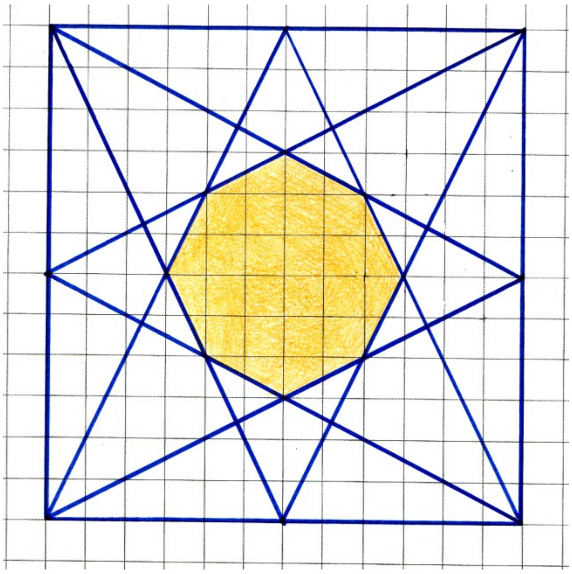


Рис.17

Так как нужно найти отношение площадей, то размеры квадрата роли не играют. Поэтому рассмотрю квадрат, расположенный на целочисленной решетке, размером 12×12; стороны квадрата лежат в узлах клеточек.

Тогда, нетрудно заметить, все вершины восьмиугольника являются

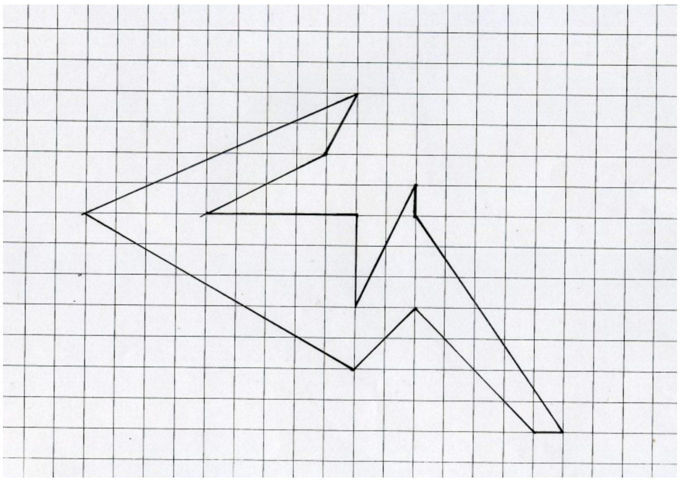
узлами решетки; более того, отсюда легко заметить, что этот восьмиугольник правильным не является— он равносторонний, но не равноугольный.

Из формулы Пика теперь легко следует, что площадь восьмиугольника равна S=21 + 8/2 − 1 = 24 кв.ед. Площадь квадрата равна 12^2 =144 кв.ед. Поэтому искомое отношение площадей

равно 6.

Ответ. 24 кв.ед., 6

6. ***Вычислить площадь многоугольника.***

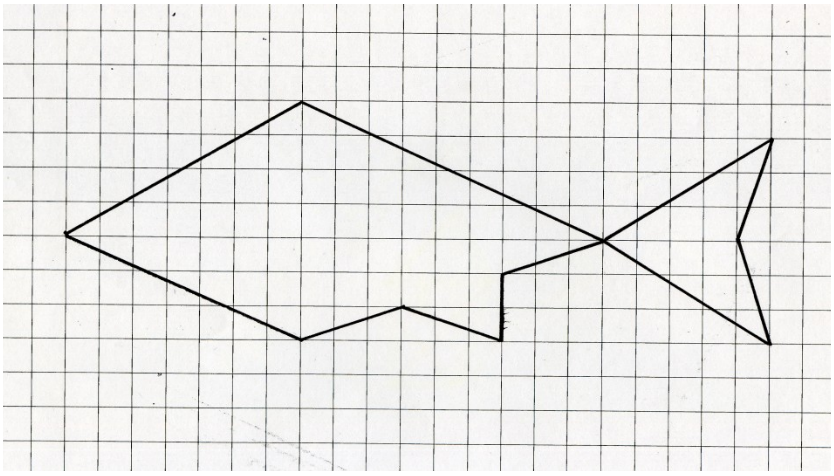


Решение:

S=33+28:2-1=46 кв.ед

Ответ. 46 кв.ед.

7. ***Вычислить площадь многоугольника.***

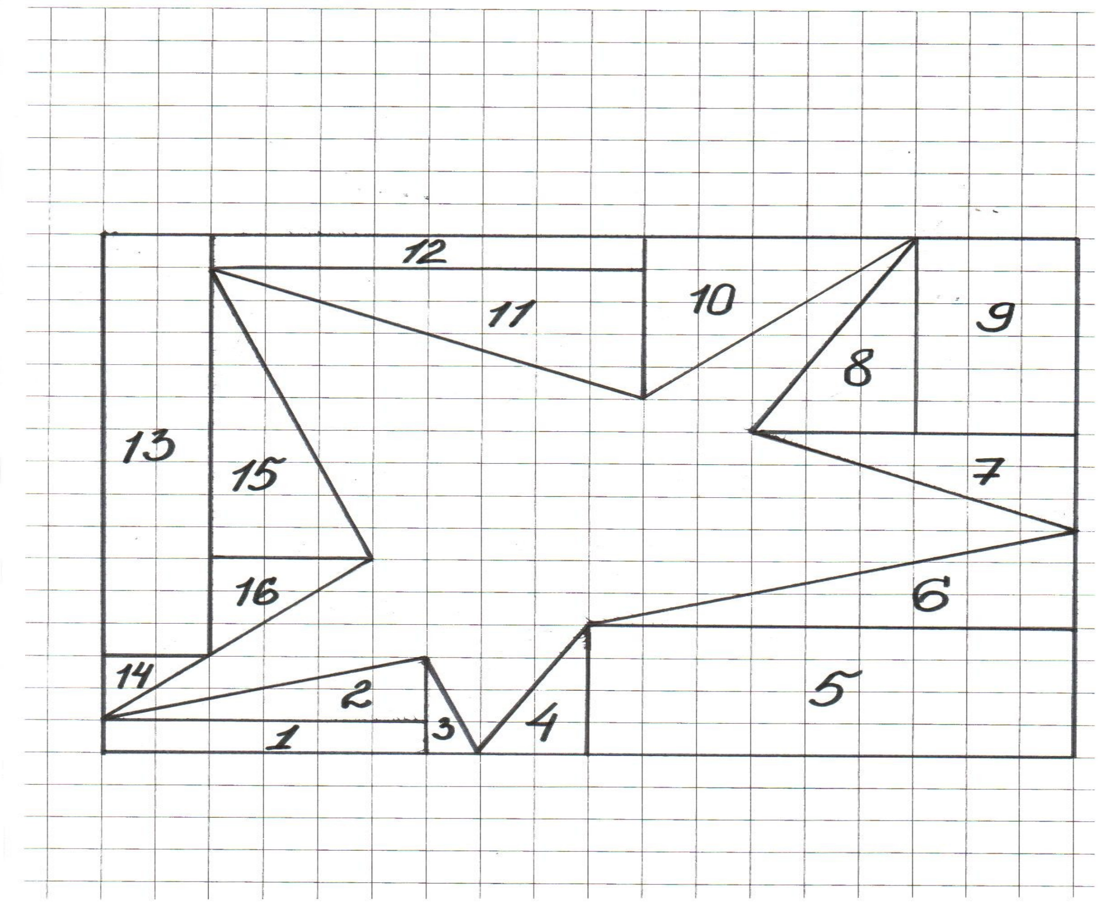


Решение:

S=65+11:2-1=69,5 кв.ед.

Ответ. 69,5 кв.ед.

8. ***Задача (ЗФТШ)***



Решение:

1 способ:

Используя формулы для вычисления площади прямоугольника и площади треугольника, вычислю площади фигур 1-16.

S1=6 кв.ед.

S2=6 кв.ед.

S3=1,5 кв.ед.

S4=4 кв.ед.

S5=36 кв.ед.

S6=13,5 кв.ед.

S7=9 кв.ед.

S8=9 кв.ед.

S9=18 кв.ед.

S10=12,5 кв.ед.

S11=16 кв.ед.

S12=8 кв.ед.

S13=26 кв.ед.

$S14=2$ кв.ед.

$S15=13,5$ кв.ед.

$S16=4,5$ кв.ед.

Площадь большого прямоугольника равна $S' = 16 \cdot 18 = 288$ кв. ед.

Найду сумму площадей $S1+S2+\ldots+S16=185,5$ кв.ед.

Следовательно, площадь многоугольника равна $S=288-185,5=102,5$ кв.ед.

<u>2 способ:</u> с помощью формулы Пика

1. Сосчитаю количество внутренних узлов.

В=88

2. Сосчитаю граничные узлы.

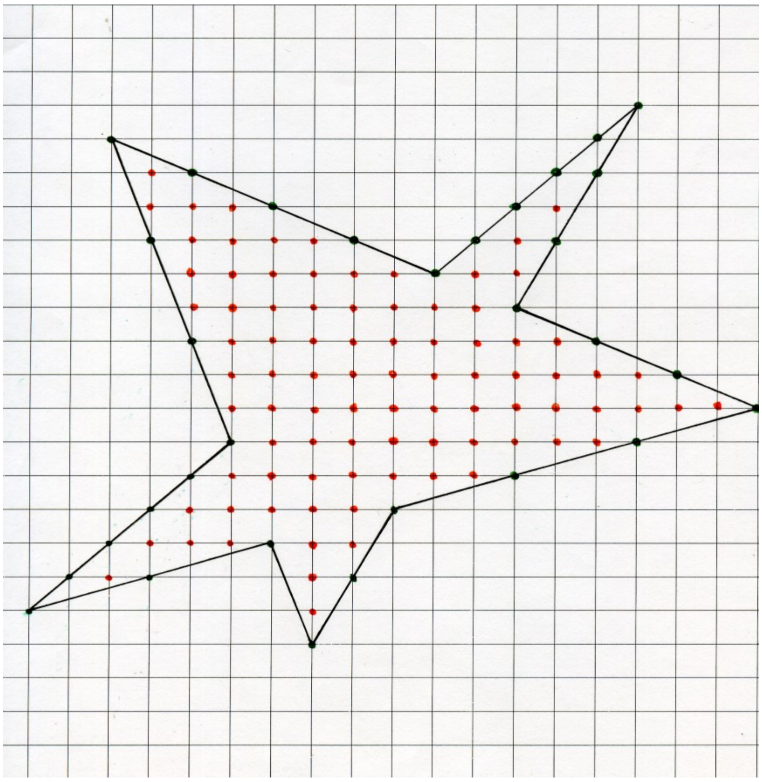
   Г=31

3. Применю формулу Пика.

   S=88+31:2-1

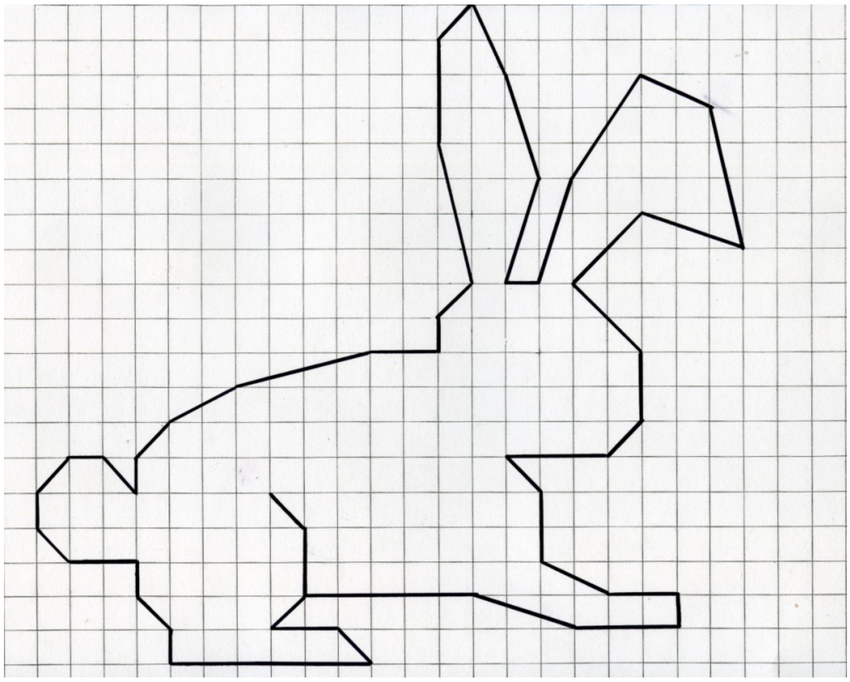
   S=88+15,5-1

   S=102,5 кв.ед



<u>Ответ:</u> 102,5 кв.ед.

9. Вычислить площадь многоугольника.

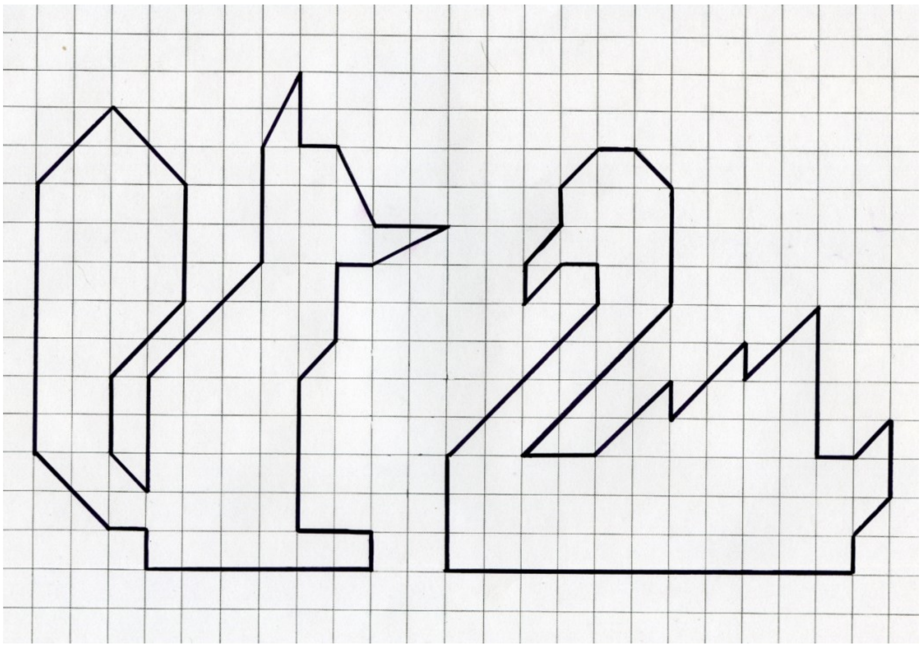


<u>Решение:</u>

S= 117+68:2-1=150 кв.ед.

<u>Ответ.</u> 150 кв.ед.

9. ***Вычислить площади многоугольников.***



Решение:

1) S=44+57:2-1=71,5 кв.ед.

2) S=40+54:2-1=66 кв.ед.

Ответ. 71,5 кв.ед.; 66 кв.ед.

ИГРЫ НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ

1. **Окружение**

Правила игры:

1) Поединок ведется на листке бумаги. Размеры и форма поля могут быть разными, минимальный размер поля – 12 х12 клеток.

2) Ходы делаются поочередно карандашом разного цвета. Сделать ход – значит поставить точку своего цвета в любой свободный узел поля.

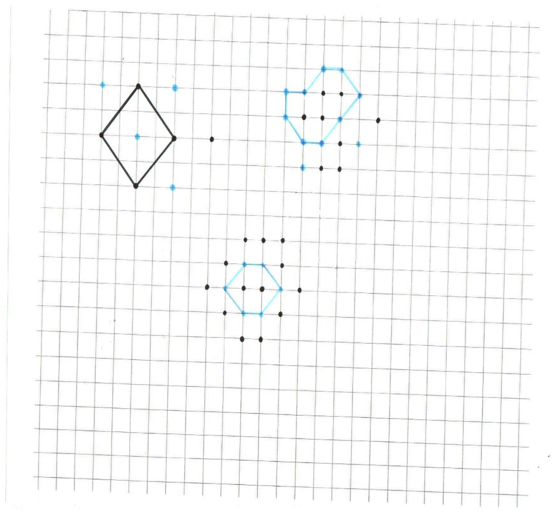
3) Цель игры – окружить (взять в плен) своими точками как можно больше точек соперника.

4) Точка считается окруженной, если все соседние с ней по вертикали и горизонтали узлы заняты точками соперника. В ходе игры в окружение попадают как отдельные точки, так и целые группы. Окруженные точки

обводятся линией, проходящей через все окружившие их точки соперника.

5) Может возникнуть ситуация, группа точек, пленившая какое-то количество точек противника, сама попадает в окружение. В этом случае «первичные» пленники считаются освобожденными.

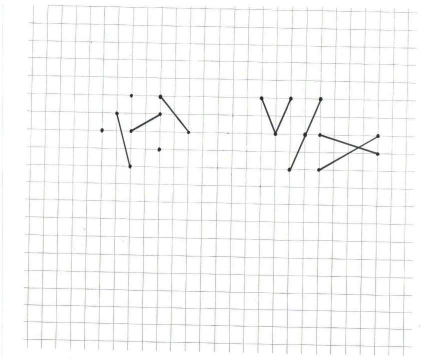
6) Игра заканчивается, когда следующие ходы уже не могут привести к окружению никаких новых точек. Победителем становится тот, кто окружил больше точек.

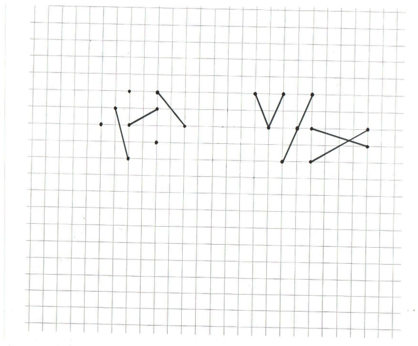


2. **Точки**

Правила игры:

Отметьте на листке несколько точек (не меньше 8). Играют двое, поочередно соединяя любые две точки отрезком. Захватывать какую-либо третью точку нельзя. Каждая точка может быть концом только одного отрезка. Линии не должны пересекаться. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередного хода. Варианты ходов:





правильные неправильные

ЭТО ИНТЕРЕСНО

1. Если вершины выпуклого n-угольника лежат в узлах клетчатой

бумаги, а внутри и на его сторонах других узлов нет, то $n \leq 4$.

Следовательно, ни за что не удастся построить на клетчатой бумаге выпуклый пяти-, шести-, и т.д. многоугольник с вершинами в узлах так, чтобы на его сторонах, ни внутри не было других узлов. А вот треугольник или четырехугольник с таким свойством нарисовать совсем нетрудно! (рис.18). Оказывается невыпуклые пяти-, шести-, и т.д. многоугольники с таким свойством тоже можно нарисовать.

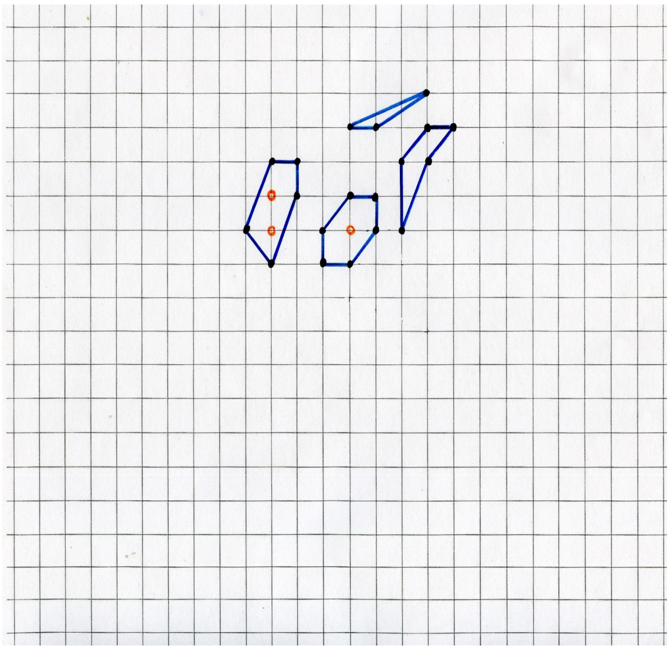
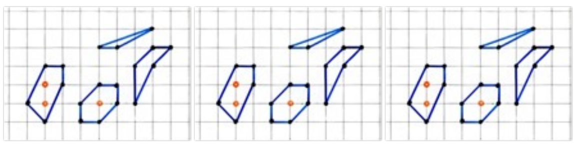


Рис.18



2. Предположим, что вершины треугольника ABC расположены в узлах сетки, причем на его сторонах других узлов нет, а внутри него есть ровно один узел O. Тогда O- точка пересечения медиан треугольника ABC

(рис.19).

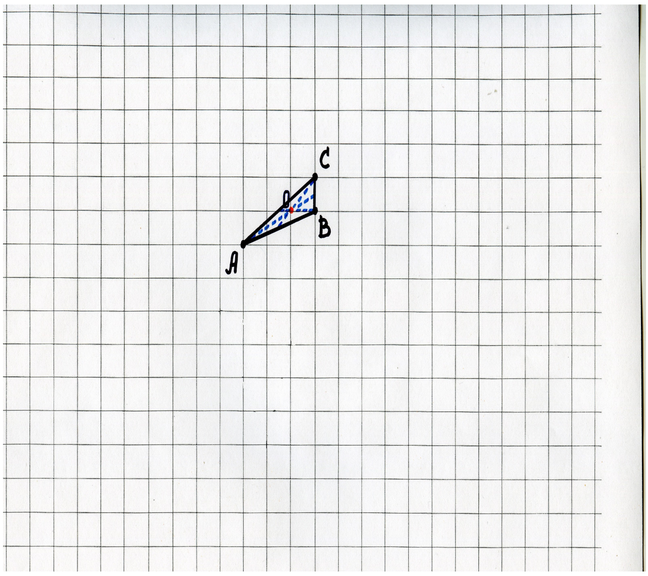


Рис.19

3. Из правильных многоугольников только четырехугольник (квадрат) можно разместить на клетчатом листе так, чтобы все его вершины лежали в узлах сетки. Ни с правильным треугольником, ни с правильным пятиугольником, и т.д., этого сделать нельзя! Замечу, что квадрат с удобством размещается на клетчатой плоскости не только очевидным образом (когда его стороны идут по линиям сетки), но и иначе (рис.20).

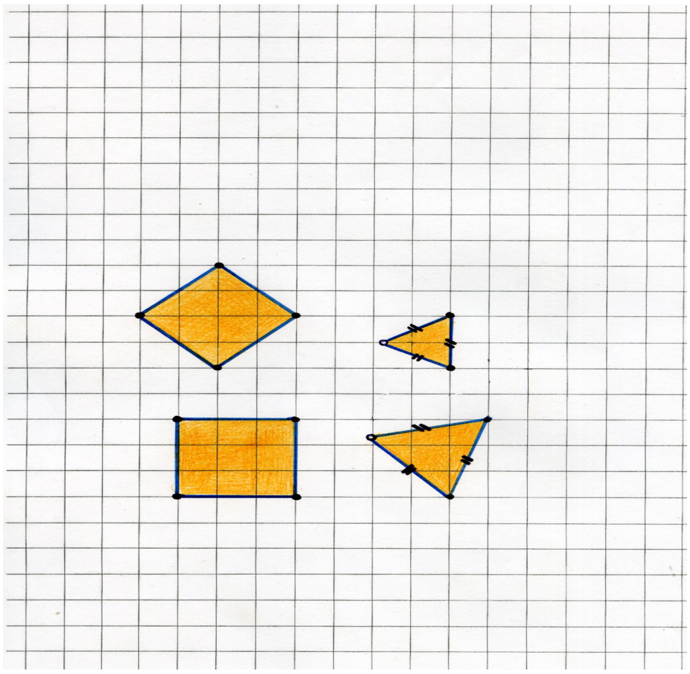


Рис.20

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель, которую я поставила перед собой, мной реализована. Работа над проектом вызвала интерес и увлекла меня. Эта работа потребовала от меня не только определенных математических знаний и настойчивости, но и дала мне возможность почувствовать огромную радость самостоятельного открытия.

Задания на вычисление площади многоугольников встречаются в олимпиадных заданиях, поэтому они развивают логическое мышление, повышают уровень математической культуры, прививают навыки самостоятельной исследовательской работы в математике.

Формула Пика облегчает и ускоряет нахождение площади многоугольников. Но и она имеет свои недостатки:

1. Чертёж должен быть очень четким (для подсчета узлов);
2. Формула применяется лишь в том случае, если многоугольник изображен на клетчатой бумаге;

3. Формула не имеет аналогов в пространстве.

Некоторые задачи в проекте решены несколькими способами.

В этом году я оканчиваю художественную школу. Поэтому решила применить свои умения и нарисовать чертежи к задачам № 9 и 10.

Я познакомила своих одноклассников с формулой Пика и провела небольшую самостоятельную работу. Ребятам предлагалось вычислить площадь многоугольника, применяя названную формулу. Результаты работы вы видите на диаграмме.

Эта работа способствовала более глубокому пониманию школьной программы и расширению кругозора.

Размышляя над тем, что сделано мною для реализации цели, я пришла к выводам:

- Наблюдение может привести к открытию;
- Лучший способ изучить что-либо – открыть это самому;
- Нужно отыскать в задаче то, что может пригодиться при решении других задач (т.е. обнаружить общий метод).

Данный материал будет полезен учащимся, интересующихся математикой. Его можно использовать на некоторых уроках и на факультативных занятиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Журнал «Квант», №12, 1974.
2. Журнал «Квант», №4, 1977;
3. Журнал «Потенциал»,№1, 2011;
4. Рисс Е.А. Математика на клетчатой бумаге. – Библиотека «Кенгуру», выпуск №8, Санкт-Петербург, «Левша», 2009;
5. Смирнов В.А., Смирнова И.М., Геометрия на клетчатой бумаге. – Москва, «Издательство МЦНМО», 2009.