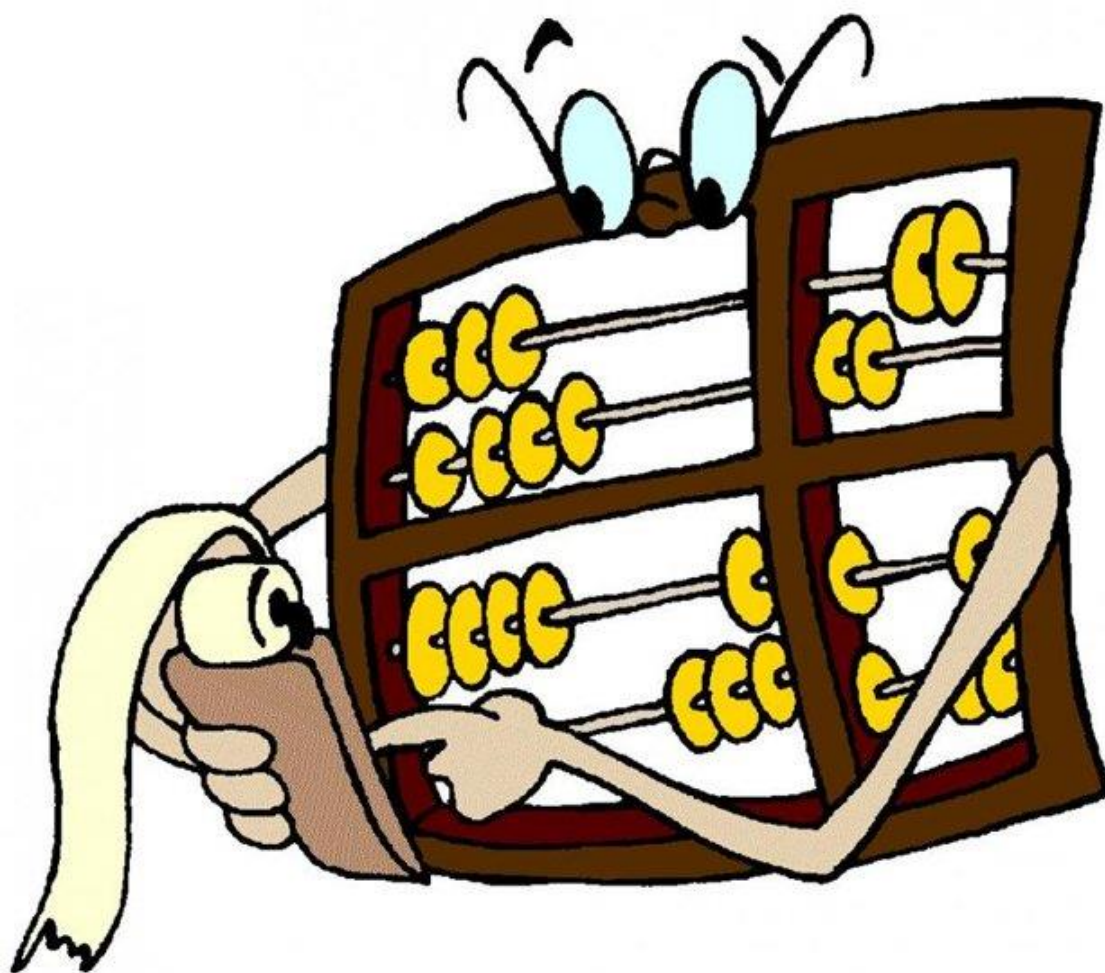


А.Р. Даниленков

Счёты



*Издательство
ШКОЛА*

Даниленков А.Р.

К 1 Счёты : Учебное пособие для общеобразовательных учреждений. – 1 – е издание. – Смоленск : МБОУ СОШ № 29, 2013 год. – 17с. ил.

Данная книга создана с целью обогащения знаний о древних и современных счётах. Отличительная особенность – правила вычисления на современных счётах. В приложении красочные иллюстрации древних и современных вычислительных устройств.

Художественное оформление.

Даниленков А.Р.

Все права защищены.

Содержание

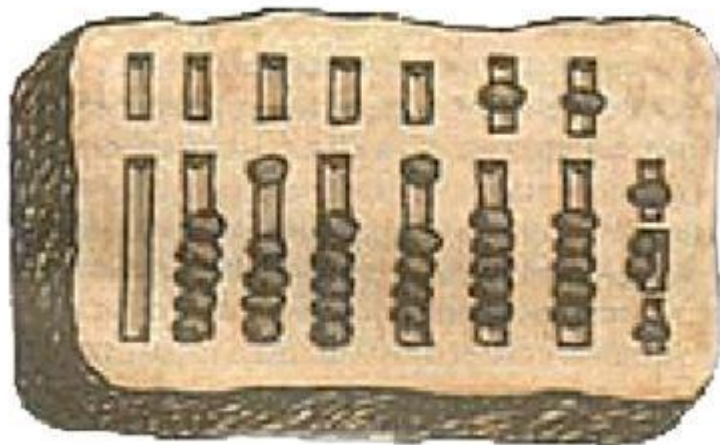
Историческая справка	4
Правила счёта	7
Пример использования счёта для решения задач	
Фрагмент из рассказа Антона Чехова «Репетитор».	13
Приложение	14
Источники информации	17

Историческая справка

Впервые счёты появились в Древнем Вавилоне 3 тыс. лет до н. э. и назывались абакон.

Доска абакон была разделена на полосы. Каждая полоска назначалась для откладывания тех или иных разрядов чисел: в первую полоску ставили столько камешков или бобов, сколько в числе единиц, во вторую полоску - сколько в нем десятков, в третью - сколько сотен, и так далее. Один и тот же камешек на абакон мог означать и единицы, и десятки, и сотни, и тысячи - все дело лишь в том, на какой полоске он лежал. Чаще всего абакон пользовались для денежных расчетов.

В 5 в. до н. э. в Египте вместо линий и углублений стали использовать палочки и проволоку с нанизанными камешками. Абакон пользовались и народы Индии.



Вместо камешков при счёте на абакон употреблялись и жетоны с начертанными на них числовыми знаками, или римскими цифрами, или особыми числовыми знаками — апексами.

Последний термин происходит от того, что в банке расчёты велись на абакон, основа которого заключалась в разграфлённой доске.

Английское государственное казначейство до последнего времени называлось Палатой шахматной доски — по клетчатому сукну, которым был покрыт стол заседаний. Клетчатая скатерть служила абакон при вычислениях.

Ацтекские счёты возникли приблизительно в X веке и изготавливались из зёрен кукурузы, нанизанных на струны, установленные в деревянной раме.

В Империи инков применялось счётное устройство юпана (в паре с кипу), имевшая разновидности: арифметическая юпана, геоюпана и др.



Арабы познакомились с абаком у подчинённых ими народов. В заглавиях многих арабских руководств по арифметике фигурируют слова от корня «пыль».

В странах Востока распространены китайский аналог абака — [суаньпань](#) и японский — соробан. Конструкции принципиально аналогичны, используют десятичную систему счисления, хотя японский вариант несколько экономичнее (в китайском, как и в русских счётах, используются «лишние» с точки зрения математики косточки). Японский соробан по сей день активно применяется, несмотря на повсеместное распространение электронных калькуляторов. В Японии использование соробана является элементом школьной программы обучения счёту в младших классах.



Десятичный абак, или русские счёты, в которых используется десятичная система счисления и возможность оперировать четвертями, десятками и сотыми дробными долями появились в России на рубеже XV — XVI веков и активно применялись в торговле вплоть до последнего десятилетия XX века. От классического абака счёты отличаются увеличением разрядности каждого числового ряда и конструкцией. Ещё одна характерная особенность русских счётов — специально выделенный разряд для счёта в четвертях. С момента своего возникновения счёты практически не изменились.

Наши счёты представляют собой также абак, в котором место полосок занимают проволоки для единиц, десятков и т. д. А у китайцев на каждой проволоке не по десять шариков, как в наших счётах, а по семь. Последние два шари-

ка отделены от первых, и каждый из них обозначает пять. Когда при расчетах набирается пять шариков, вместо них откладывают один шарик второго отделения счетов. Такое устройство китайских счетов уменьшает необходимое число шариков. Основная заслуга изобретателей абака — создание позиционной системы представления чисел.



Правила счёта

Простое механическое устройство для произведения арифметических расчётов, усовершенствованный аналог римского абака, являются одним из первых вычислительных устройств. Счёты представляют собой раму с нанизанными на спицы костяшками, обычно по 10 штук.

В русских счётах применяется десятичная система счисления.

Каждый ряд костяшек представляет собой числовой разряд, причём вверх от прута с четырьмя костяшками разряд возрастает от единиц до сотен тысяч, а вниз — уменьшается от десятых до тысячных. Максимальное значение для каждого ряда — десять, умноженное на вес разряда (для разряда единиц максимальное значение — 10, если все костяшки отложены влево, для десятков — 100 и так далее). «Набор» числа осуществляется сдвиганием костяшек из правого края прута в левый.

Прут, на котором находятся всего 4 костяшки, использовался для расчётов в полушках. 1 полушка была равна половине деньги, то есть четверти копейки, соответственно, четыре костяшки составляли одну копейку[2]. Также этот прут использовался для перевода фунтов в пуды (1 пуд = 40 фунтов). Также этот прут может служить разделителем целой и дробной частей набранного на счётах числа, и в вычислениях не использоваться.

Таким образом, максимальное число, которое можно набрать на счётах с семью рядами целых чисел, составляет 11`111`111,110.

После добавления к девяти костяшкам одного разряда десятой костяшки производится операция записи единицы переноса в следующий разряд, состоящая из трёх действий:

1. сдвигом влево одной костяшки к девяти костяшкам добавляется десятая костяшка;
2. сдвигом вправо всех десяти костяшек предыдущий разряд обнуляется;
3. сдвигом влево одной костяшки в следующий разряд записывается единица переноса.

для удобства счета (в частности, чтобы удобно получать дополнение до 10, необходимое для переноса разряда при вычитании) в русских счётах было выбрано число костяшек равное десяти, что формально соответствует единичнокодированной одиннадцатиричной системе счисления.

Теоретически, с помощью счёт можно выполнять все четыре базовые арифметических операции в пределах разрядности счёт. Однако на практике удобно и быстро на счётах можно только складывать и вычитать; операция умножения на произвольное число достаточно сложна, а деление в общем виде, скорее всего, займёт больше времени, чем выполнение той же операции на бумаге. Впрочем, есть достаточно большое количество специальных случаев, когда счёты вполне применимы для умножения и деления.

Кроме того, нужно учитывать следующие моменты:

- Счёты в принципе не предназначены для манипуляций с отрицательными числами. Поэтому любые операции должны приводиться к положительным числам, а знак, если это необходимо, должен просто учитываться отдельно.
- В операциях умножения и деления учитывать положение десятичного разделителя.

Сложение

Сложение на счётах выполняется «снизу вверх» (от младших разрядов к старшим). На счётах «набирается» первое слагаемое, после чего поразрядно, от младшего разряда к старшему, производятся следующие действия:

1. На проволоке, соответствующей разряду, перебрасывается *влево* столько косточек, сколько единиц в соответствующем разряде второго слагаемого.
2. Если на проволоке не хватает косточек для выполнения первого действия, то на проволоке слева оставляется столько косточек, сколько не хватило, а на следующей (находящейся выше) проволоке перебрасывается влево одна косточка.
3. Если в результате действия (как первого, так и второго, и данного) слева на проволоке оказалось 10 косточек, то все косточки на этой проволоке перебрасываются вправо, а на следующей (находящейся выше) проволоке дополнительно перебрасывается



влево одна косточка. После того, как будут выполнены действия со всеми разрядами, «набранное» на счётах число и будет результатом сложения.

Вычитание

Вычитание на счётах выполняется «сверху вниз», то есть от старших разрядов к младшим. В силу непригодности счётов для работы с отрицательными числами всегда нужно из большего положительного числа вычитать меньшее положительное число. Если требуется вычесть из меньшего большее, числа следует поменять местами и оставить знак «в уме».

На счётах «набирается» уменьшаемое, после чего поразрядно, от старшего разряда к младшему, производятся следующие действия:

1. На проволоке, соответствующей разряду, перебрасывается *вправо* столько косточек, сколько единиц в соответствующем разряде вычитаемого.
2. Если на проволоке не хватает косточек для выполнения первого действия, производится перенос разряда: слева оставляется $(10 - n)$ косточек, где n — «недостающее» число косточек (чтобы не делать второе вычитание в уме, можно весь десяток косточек на данной проволоке перенести влево, после чего отбросить недостающее число косточек), а на находящейся выше проволоке отбрасывается *вправо* одна косточка.
3. Если при переносе на проволоке, соответствующей старшему разряду, не хватает косточек, то выполняется перенос в следующий (ещё более старший) разряд и так до тех пор, пока на одной из проволок не окажется достаточного количества косточек. Так, например, при вычитании $(1001 - 3)$ сначала на проволоке младшего разряда будет оставлено 8 косточек и потребуется перенос во второй разряд, затем — в третий, и только после этого на проволоке четвёртого разряда окажется достаточно косточек, чтобы завершить операцию.

Умножение

Умножение на однозначное число в общем случае может быть заменено на сложение множимого с самим собой соответствующее количество раз. Целые многозначные числа перемножаются поразрядно, аналогично «умножению в столбик»:

1. В качестве множимого выбирается то из двух чисел, которое содержит больше ненулевых цифр.
2. Множимое прибавляется к самому себе столько раз, сколько единиц в младшем (первом) разряде множителя.
3. Для каждого следующего разряда множителя множимое прибавляется к уже имеющемуся на счётах числу соответствующее количество раз, но со сдвигом на один разряд вверх. То есть для разряда десятков сложение производится со сдвигом на один разряд, сотен — на два и так далее.

4. Если в соответствующем разряде множителя стоит нуль, то, естественно, никакого сложения не производится, а просто делается сдвиг на одну проволоку вверх и переход к следующему разряду.
5. Когда будут произведены прибавления для всех ненулевых разрядов множителя, на счётах будет получен результат умножения. Положение десятичного разделителя при этом нужно учитывать в той позиции, где он был при первых сложениях (то есть сдвиги десятичного разделителя учитываются только в промежуточных операциях).

Если перемножаются нецелые числа, то операция выполняется точно так же (вычисления ведутся с целыми числами, десятичные разделители просто игнорируются). Десятичный разделитель ставится в нужную позицию вручную при записи результата.

Несмотря на громоздкость алгоритма, при выработанном навыке выигрыш времени по сравнению с расчётом на бумаге может быть значительным.

Деление

Деление в общем виде заменяется вычитанием. Общий алгоритм деления целых чисел выглядит следующим образом:

1. Делимое набирается на счётах в нижней их части.
2. Из старших разрядов делимого выбирается группа такого размера, чтобы составленное ею число было больше делителя, но меньше делителя, умноженного на десять. Десятичный разделитель мысленно переносится за младший разряд этой группы.
3. Из набранного числа (с учётом поставленного разделителя) делитель вычитается до тех пор, пока уменьшаемое не станет меньше делителя. При каждом успешном вычитании на верхней проволоке счёт переносится влево одна косточка.
4. По завершении вычитания десятичный разделитель мысленно передвигается на одну проволоку вниз. Далее вычитание делителя повторяется для нового уменьшаемого, а результат заносится на следующую (вторую, далее — третью и т. д.) проволоку.
5. Предыдущий пункт повторяется до тех пор, пока не закончится набранное на счётах число, либо пока не будет получено нужное число цифр результата.
6. На верхних проволоках по завершении всех операций будет набран результат деления. Положение десятичного разделителя при этом — такое же, как было у делимого.

Если делимое кратно делителю, то операция завершится по достижении младшего десятичного разряда делимого и все косточки, кроме тех, на которых накоплен результат, будут справа. Если же нет, то на счётах останется число, соответствующее остатку от деления. Если необходимо, далее можно получать десятичные знаки дробного результата до тех пор, пока хватает проволок на счётах (когда сдвигать десятичный разделитель вниз станет некуда, можно ис-

кусственно перенести накопившийся остаток выше, чтобы продолжить деление; так можно получить до 7-8 цифр результата).

Упрощённые приёмы умножения и деления

Произвольное умножение и, особенно, деление на счётах не слишком удобно. Однако существует целый ряд частных случаев, когда умножение и деление выполняются намного проще:

- Умножение и деление на 10 заменяется переносом числа на разряд вверх или вниз. При этом фактически переносить запись нет никакой необходимости — достаточно мысленно переместить разделитель целой и дробной части числа на одну проволоку, соответственно, вниз или вверх. В руководствах по вычислению на счётах рекомендовалось во время ведения вычислений удерживать палец левой руки на раме счётов напротив промежутка между проволоками, соответствующими единицам и десятым, либо отмечать текущее положение десятичного разделителя каким-нибудь подручным средством (кнопка, гвоздик, вставляемый в специально проделанные в раме счётов отверстия и т. п.).
- Умножение на 2 заменяется сложением числа с самим собой.
- Умножение на 3 заменяется сложением с самим собой два раза.
- Умножение на 4 заменяется двукратным удвоением.
- Умножение на 5 заменяется умножением на 10 и делением на 2.
- Умножение на 6 заменяется умножением на 5 и прибавлением исходного числа.
- Умножение на 7 заменяется троекратным удвоением и вычитанием исходного числа.
- Умножение на 8 заменяется троекратным удвоением.
- Умножение на 9 заменяется умножением на 10 и вычитанием исходного числа.

Деление на 2. Производится от младших разрядов к старшим. На каждой проволоке производится отбрасывание половины имеющихся косточек. Если на проволоке нечётное количество косточек, то «лишняя» косточка тоже отбрасывается, а на проволоке ниже (в младшем разряде) переносится влево ещё пять косточек. Например, при делении $(57 / 2)$ в разряде единиц нечётное число — будет отброшено 4 косточки (останется 3), при этом в разряде десятых долей будет прибавлено 5, затем в разряде десятков из пяти косточек отбрасывается три (останется 2), а в единичный разряд дополнительно прибавляется 5 (станет 8), таким образом, получается правильный ответ: 28,5.

Деление на 3. Заменяется умножением исходного числа на 3 и последовательным сложением результата с самим собой со сдвигом вниз столько раз, сколько нужно разрядов в результате. При сдвиге «за пределы счётов» прибавляемое число округляется. Результат сложения нужно разделить на 10.

Деление на 4. Заменяется двукратным делением на 2.

Деление на 5. Заменяется делением на 10 и умножением на 2.

Деление на 6. Заменяется последовательным делением на 2 и на 3.

Деление на 7. Выполняется по общему алгоритму (поразрядное вычитание семёрки).

Деление на 8. Заменяется трёхкратным делением на 2.

Деление на 9. Выполняется сложением числа с самим собой с последовательным поразрядным сдвигом вниз столько раз, сколько нужно разрядов в результате. Результат сложения делится на 10.

Умножение и деление на любую степень двойки производится, соответственно, последовательным удвоением или делением на 2.

Умножение на двузначное число из двух одинаковых цифр «NN» (11, 22, 33, 44 и т. д.) заменяется умножением и сложением со сдвигом. Сначала исходное значение умножается на N любым удобным способом. Затем десятичный разделитель переносится на разряд *вниз* и результат умножения прибавляется сам к себе, но со сдвигом *вниз* на одну проволоку (прибавлять со сдвигом вниз удобнее, так как сложение производится снизу вверх, и добавляемое число косточек всегда видно на одну проволоку выше — нет необходимости что-то запоминать).

Часто можно с помощью несложных манипуляций привести вычисляемую операцию к комбинации частных случаев умножения и деления. Напри-

мер, умножение на 25 можно заменить умножением на 100 и двукратным делением на 2. Когда один или оба операнда близки к «удобным» для расчётов числам, можно комбинировать специальные случаи умножения и деления со сложением и вычитанием. Но возможность подобных трюков сильно зависит от уровня подготовки вычислителя. Собственно, искусство вычисления на счётах и заключается в умении свести любое требуемое вычисление к комбинации легко поддающихся счёту элементов.



Фрагмент из рассказа Антона Чехова «Репетитор»

Гимназист-репетитор Егор Алексеич Зиберов задал малолетнему Пете Удову задачу:

«Купец купил 138 аршин чёрного и синего сукна за 540 рублей. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 рублей за аршин, а чёрное — 3 рубля.»

Петя не смог решить её. Впрочем, и сам репетитор не справился, хотя знал, что «задача, собственно говоря, алгебраическая» и «ее с иксом и игреком решить можно». Действительно, если предположить, что x — это количество синего сукна, а y — чёрного, можно составить следующую систему уравнений:

$$x + y = 138$$

$$5x + 3y = 540$$

решив которую, получим, что $y = 75$, $x = 63$.

Однако алгебраическое — с помощью системы уравнений — решение этой задачи ведет к потере её внутренней логики. Петин отец, отставной губернский секретарь Удодов, продемонстрировал другое решение:

— И без алгебры решить можно,— говорит Удодов, протягивая руку к счётам и вздыхая. — Вот, извольте видеть... Он щёлкает на счётах, и у него получается 75 и 63, что и нужно было.

— Вот-с... по-нашему, по-неучёному.

Само «неучёное» решение Чеховым в рассказе не приводится, но оно легко может быть реконструировано, поскольку задача имеет стандартное арифметическое решение, опирающееся на логику и состоящее в выполнении шести арифметических действий:

«Предположим, что всё купленное сукно было синее. Тогда партия в 138 аршин стоила бы $5 \cdot 138 = 690$ рублей. Но это на $690 - 540 = 150$ рублей больше того, что было заплачено в действительности. «Перерасход» в 150 рублей указывает на то, что в партии имелось более дешевое, чёрное, сук-



но — по 3 рубля за аршин. Этого сукна столько, что из двухрублёвой разницы ($5 - 3 = 2$ рубля) получается 150 «лишних» рублей. То есть, $150 / 2 = 75$ аршин чёрного сукна. Отсюда $138 - 75 = 63$ аршин сукна синего ».

«Щёлканье на счётах», выполненное Удодовым, выглядело следующим образом:



1. Прежде всего Удодов-старший «набирает» число 138: одна косточка на первой проволоке, три — на второй, восемь — на третьей.

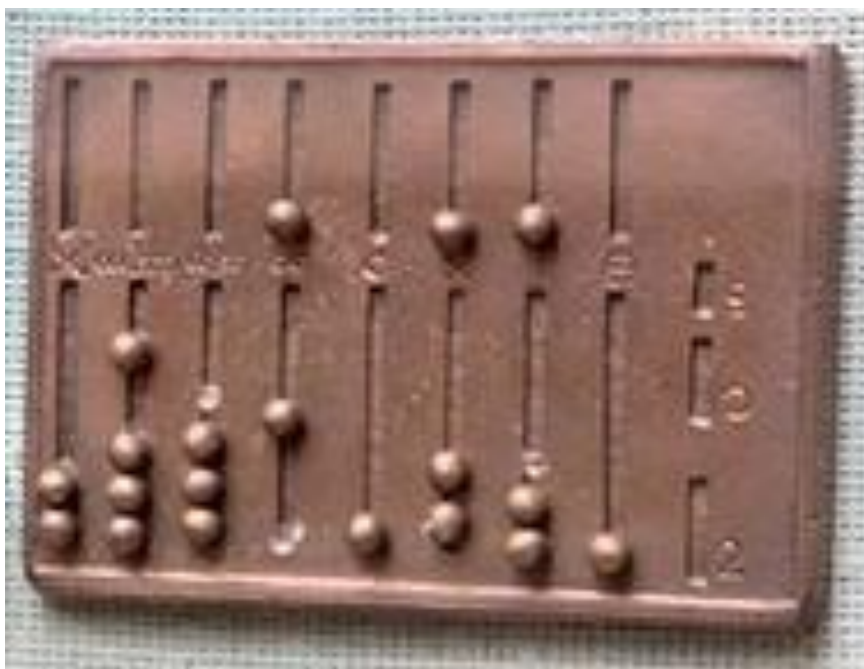
2. Затем он должен умножить 138 на 5. Для упрощения счёта вместо этого он сначала умножает 138 на 10, не делая никаких манипуляций, просто мысленно перенося все косточки одним рядом выше, после чего делит на 2: на каждой проволоке, начиная снизу, откидывает половину косточек. На третьей проволоке, где отложено восемь косточек, откидывает четыре; на средней проволоке из трех косточек откидывает две, при этом одну из них мысленно заменяет десятью нижними и делит их пополам, то есть добавляет пять косточек к тем, что находятся на следующей проволоке; на верхней проволоке убирает одну косточку, прибавляя пять к косточкам на второй проволоке. В результате на верхней проволоке косточек нет, на второй осталось шесть, на третьей — девять. Итого — 690.

3. Далее Удодову-старшему нужно из 690 вычесть 540: со второй проволоки убирается пять косточек, с третьей — четыре. Остается 150.

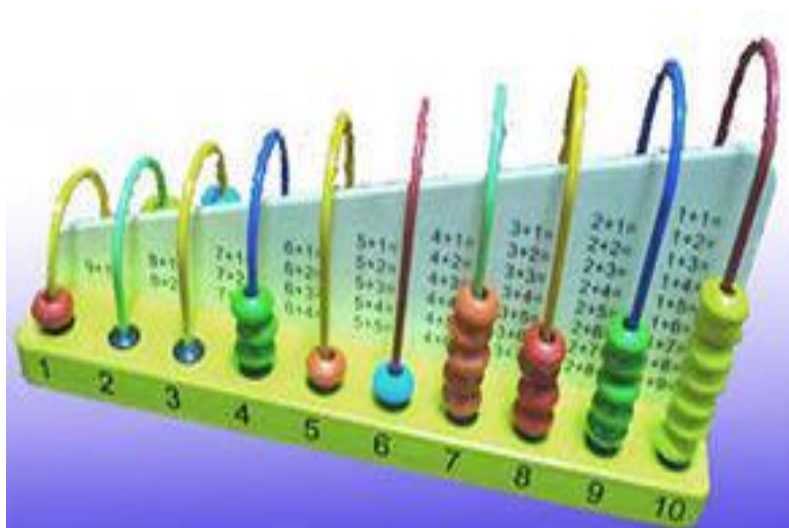
4. Теперь 150 нужно поделить пополам (см. выше) — получается 75.

5. Осталось из 138 вычесть 75. Повторно «набирается» 138, на второй проволоке нужно отбросить семь, но там только три. Не хватает четырёх, поэтому Удодов-старший оставляет на проволоке шесть косточек (если ему лень вычитать в уме четыре из десяти, он может перекинуть весь десяток на второй проволоке влево и отбросить от него «недовычитенные» четыре косточки), а с первой проволоки снимает одну. Осталось на третьей проволоке из восьми косточек отбросить пять. Получается 63.

Приложение



Древний абак



Детские счёты





Источники информации

1. <http://ru.wikipedia.org>
2. <http://images.yandex.ru>
3. Paint.NET



Учебное издание

Даниленков Арсений Романович

Счёты

Генеральный директор издательства Р.Д. Родикова

Главный редактор А.Р. Даниленков

Оформление и художественное редактирование О.С. Даниленкова

Лицензия АРД № 290902

Е – mail: arsendanilenkov2013@yandex.ru

Отпечатано: «МБОУ СОШ № 29 с УИОП», 214031, г.

Смоленск, ул. Маршала Соколовского, 7 б.

Смоленск 2013г.

