Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа № 6 г.Бикина
Хабаровского края

Пособие по стереометрии для выпускников старшей школы по решению задач С2 координатно-векторным методом

в сопровождении
электронного приложения

2015 год

Цифровая школа старшей ступени. Пособие по стереометрии для выпускников старшей школы по решению задач С2 координатно – векторным методом в сопровождении электронного приложения предназначено для подготовки старшеклассников к успешной сдачи ЕГЭ по математике. Составители пособия / Володин Евгений, Ефимович Савелий, Кравченко Дарья, Шишкина Анна – обучающиеся 11 физико-математического класса; под ред. О.В. Тупицыной – учителя математики высшей квалификационной категории МБОУ СОШ №6 г. Бикина. – г. Бикин: МБОУ СОШ №6 г. Бикина Бикинского муниципального района Хабаровского края, 2014. – 20С.

,

Слово учителю – руководителю проекта

Конечным результатом моей педагогической деятельности в обучении должна стать образованная и эстетически развитая личность. А любая личность должна уметь свободно мыслить и принимать самостоятельные решения. К этому стремлюсь я, как наставник, и мои ученики. Поэтому развитие творческих способностей является неотъемлемой частью нашего совместного взаимодействия. Проектно-исследовательская деятельность, с точки зрения учащихся, – это возможность самостоятельно создать интеллектуальный продукт, максимально используя свои возможности; это - деятельность, позволяющая проявить себя, попробовать свои силы, приложить свои знания, принести пользу и публично показать результат, самоутвердиться.

Поэтому разработка данного проекта - это путь к саморазвитию личности моих школьников через осознание собственных потребностей, через самореализацию в предметной деятельности. Помимо работы с конкретной темой предлагается широкий спектр личностных коммуникативных связей с ребятами в группе, с одноклассниками, со мной учителем – тьютором.

Для меня созданный проект ценен тем, что в ходе его выполнения, ребята учились самостоятельно приобретать знания, получать опыт познавательной и учебной деятельности. Вместе с тем, мне самой приходилось глубоко вникать в темы, над которыми работали мои ученики. Это окупается сполна и тем, что растёт моё педагогическое мастерство и увеличиваются собственные знания в предмете, но и вижу я радостный огонёк в глазах своих учеников. Хочу пожелать всем выпускникам 2014 года успехов на итоговом тестировании.

Слово ученикам – авторам проекта

Работа над проектом стала для нас незаменимым опытом в решении задач ЕГЭ по математике. По мере создания, мы развивали не только навыки проектной деятельности, наличие которых, безусловно, важно для будущих студентов, но также мы обучались новому методу решения стереометрических задач.

Наш проект – это возможность поделиться накопленным опытом, полученными знаниями. Проведя на себе такого рода математический эксперимент, мы можем предсказать возможные ошибки школьников, допускаемые в решении, и предотвратить их появление.

Проект уникален тем, что в нем представлены примеры решения задач, составленные нами самими – они подробно расписаны, их понимание доступно. Испытывать трудности в переходе от одного действия к другому в ходе решения сводится к минимуму, так как мы постарались более тесно связать все шаги выполнения задачи. Однако, углубляясь в теорию, рассчитывать приходится на знание формул и уметь найти необходимый справочный материал.

Мы уверены, что разработанный нами проект будет полезен для учащихся 10-11-х классов, готовящихся к ЕГЭ по математике, так как он уже был протестирован нами на нас самих.

Содержание

Введение

Алгебра - не что иное, как записанная
в символах геометрия,
а геометрия - это просто алгебра,
воплощенная в фигурах.

Софий Жермен
(1776-1831)

Применение алгебры к изучению свойств геометрических фигур выразилось в методе координат (координатно – векторный метод) — весьма эффективным и универсальным способе нахождения любых углов или расстояний между стереометрическими объектами в пространстве. Данный метод решения заключается во введении (привязке к исследуемым фигурам) декартовой системы координат, а затем – исчислении образующихся векторов (их длин и углов между ними).

Достоинство метода координат состоит в том, что его применение избавляет от необходимости прибегать к наглядному представлению сложных пространственных конфигураций. Координатный метод имеет преимущество перед другими способами тем, что требует меньше стереометрических соображений и видения, а основывается на применении формул, у которых много планиметрических и алгебраических аналогий, более привычных для учащихся.

Если у выпускника старшей школы имеются серьезные проблемы с пониманием определений, с чтением или построением сложного стереометрического рисунка, если ему никак не удается подобрать необходимые дополнительные построения, значит стоит заняться изучением координатно-векторного метода, его применением к решению задач, которые имеются в КИМах по ЕГЭ. Это задачи С2.

В данной брошюре представлены все основные типы задач, решаемых координатно –векторным методом: расстояние между двумя точками; расстояние от точки до прямой и до плоскости; расстояние между скрещивающимися прямыми; угол между двумя прямыми; угол между прямой и плоскостью; угол между плоскостями. К каждому типу даны формулы с помощью которых можно ответить на поставленный вопрос задачи и краткие теоретические понятия. Приведён пример задачи и показано подробное её решение, способствующее самостоятельному разбору всех шагов и действий. Для первичной проверки своих знаний выпускникам предлагается задача с неполным решением, но с выстроенным ходом действий и представлены пояснения для самостоятельных умозаключений.

Наконец, в брошюре подобраны задачи для самостоятельного решения и ответы к ним на проверку своих умений применять координатно – векторный метод в том или ином типе задач С2. Ко всем задачам представлены рисунки с фигурами, помещёнными в прямоугольную систему координат трёхмерного пространства с необходимыми элементами из условия задач. и по видам задач.

С помощью данного пособия можно попробовать поучиться решать задачи на вычисление углов и расстояний в стереометрии с помощью координатно-векторного метода.

Сборник по типологии задач

1. Расстояние между двумя точками

Используются формулы:

Расстояние между точками *A* и *B* можно вычислить:

1) длину отрезка *AB* *где*, $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, *тогда*

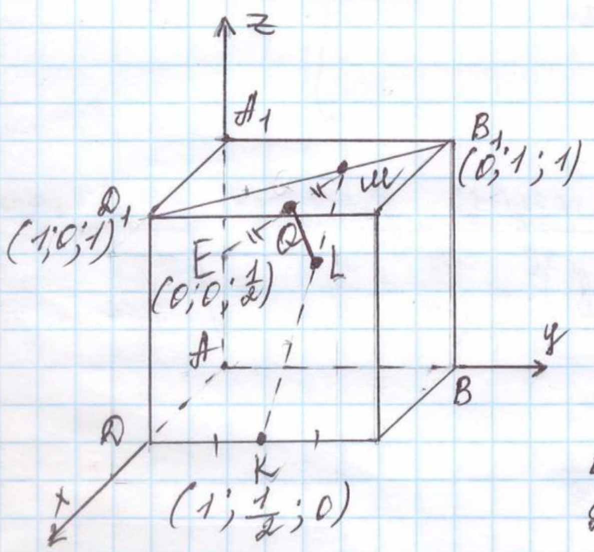
$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

2) как длину вектора $\overrightarrow{AB} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, где $\overrightarrow{AB}\{x; y; z\}$

Задача с подробным решением

(разберите самостоятельно все представленные шаги и действия решения)

В единичном кубе $A \ldots D_1$ точки E и K — середины рёбер AA_1 и CD соответственно, а точка M расположена на диагонали основания B_1D_1 так, что $B_1M = 2MD_1$. Найти расстояние между точками Q и L, где Q — середина отрезка EM, а точка L делит отрезок MK так, что $ML = 2LK$.



Дано: $A \ldots D_1$ — куб.
$AE = EA_1$
$CK = KD$
$B_1M = 2MD_1$
$EQ = QM$
$ML = 2LK$
Найти: $|QL|$ — ?

Решение: 1) Найдём координаты (.) E, K, B_1, D_1

$E(0; 0; \frac{1}{2})$, $K(1; \frac{1}{2}; 0)$, $B_1(0; 1; 1)$, $D_1(1; 0; 1)$.

2) Найдём координаты (.) M, используя формулу координат (.), делящей отрезок B_1D_1 в отношении $2:1$, т.е.

$$M\left(\frac{0+2\cdot 1}{1+2}; \frac{1+2\cdot 0}{1+2}; \frac{1+2\cdot 1}{1+2}\right) = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 1\right),$$

где $\lambda = 2$

3) Аналогично получим координаты (.) L, делящей отрезок MK в отношении $2:1$:

$$L\left(\frac{\frac{2}{3}+2\cdot 1}{1+2};\ \frac{\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{2}}{1+2};\ \frac{1+2\cdot 0}{1+2}\right)=\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{1}{3}\right).$$

4) (По формуле координаты середины отрезка) =>

$$\left.\begin{aligned} x_Q&=\frac{x_M+x_E}{2}\\ y_Q&=\frac{y_M+y_E}{2}\\ z_Q&=\frac{z_M+z_E}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow Q\left(\frac{1}{3};\frac{1}{6};\frac{3}{4}\right).$$

5) Применим формулу длины отрезка:

$$LQ=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{6}-\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{725}{36^2}}=$$

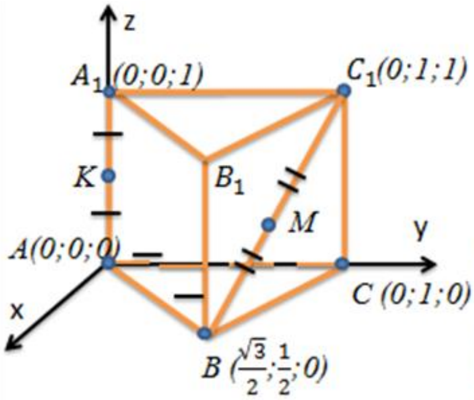
$$=\frac{5\sqrt{29}}{36}$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{29}}{36}$

Задача с неполным решением

(допишите недостающие действия, и проверти свои знания)

В правильной треугольной призме, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1



Дано: $A\dots C_1$ прав. треугольная призма.

$AB=\dots C\ C_1=1$.

Найти: ρ (AA_1 и BC_1)

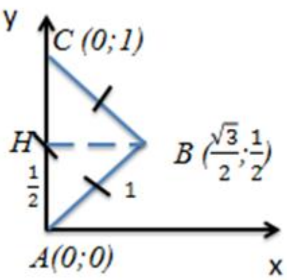
Решение:

Чтобы найти расстояние между скрещивающимися прямыми $A\ A_1$ и BC_1, необходимо найти расстояние между K и M- серединами этих отрезков, потому что ΔKBC_1-… и KM-…

1) *Запишем координаты точек A, A_1, C, C_1…;*
2) *Для нахождения абсциссы точки B, найдем BH высоту ΔABC из ΔBAH- прямоугольного $BH=\dots \Rightarrow B\ (\dots)$;*

3) Найдем координаты т. K-середины $A\ A_1$ по формулам … $\Rightarrow K\ (\dots)$, аналогично т. M середина $BC_1 \Rightarrow M\ (\dots)$;

4) Находим расстояние м/ду точками K и M по формуле …



Задачи для самостоятельного решения

1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1и BC_1. Ответ: $(\frac{\sqrt{3}}{2})$
2. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$,все ребра основания которой равны 2.Сечение, проходящее через боковое ребро AA_1и середину Mребра B_1C_1,является квадратом. Найдите расстояние между прямыми A_1Bи AM. Ответ: $(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{7}})$
3. Дана правильная четырёхугольная пирамида *MABCD*, рёбра основания которой равны 5. Тангенс угла между прямыми *DM* и *AL* равен $\frac{2}{3}$,*L* — середина ребра *MB*. Найдите высоту данной пирамиды. Ответ: 10

2. Расстояние от точки до прямой и до плоскости.

Расстояние от точки до прямой, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, проведенного из этой точки на прямую.
Расстояние между двумя параллельными прямыми равно длине отрезка их
Расстояние от точки до плоскости, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.
Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равно длине их общего перпендикуляра.
Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равно расстоянию от любой точки этой прямой до плоскости.
Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно длине их общего перпендикуляра.
Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно расстоянию между точкой одной из этих плоскостей и другой плоскостью.

Используются формулы:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2};$$

т. косинусов для нахождения угла и сторон треугольника; синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника.

***

$$\rho(M,\alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad где– \quad M(x_0, y_0, z_0)\ \alpha: \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

***

Координаты x, y, z точки M, которая делит отрезок $\overline{M_1M_2}$, ограниченный точками

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, в отношении λ, определяется по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

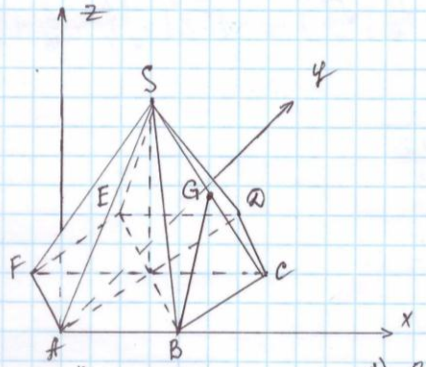
Если точка M – середина отрезка, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Задача с подробным решением
(разберите самостоятельно все представленные шаги и действия решения)

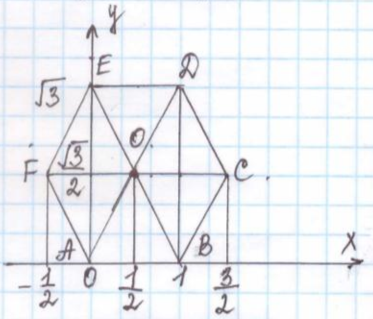
Задача 3.

В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите расстояние от точки F до прямой BG, где G – середина ребра SC.



Дано:
SABCDEF – правильная 6-ти угольная пирамида.
$AB = BC = CD = DE = EF = FA = 1$
$AS = SB = SC = SD = SE = SF = 2$
$(\cdot)\ G \in SC$, $CG = SG$

Найти: расстояние от $(\cdot)$ F до прямой BG



Решение:
1) Выпишем координаты $(\cdot)$ B, F, G; $B(1;0;0)$, $F(-0{,}5;\frac{\sqrt3}{2};0)$
$G(1;\frac{\sqrt3}{2};\frac{\sqrt3}{2})$
$\overrightarrow{BG}(0;\frac{\sqrt3}{2};\frac{\sqrt3}{2})$.

2) проведём $FK \perp BG$.
если $\frac{AK}{KB} = \lambda$, то координаты $(\cdot)K$ =

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\ z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

$$x = \frac{1+\lambda}{1+\lambda};\ y = \frac{0+\frac{\sqrt3}{2}\lambda}{1+\lambda};\ z = \frac{0+\frac{\sqrt3}{2}\lambda}{1+\lambda}$$

тогда $K\left(\frac{1+\lambda}{1+\lambda};\frac{\frac{\sqrt3}{2}\lambda}{1+\lambda};\frac{\frac{\sqrt3}{2}\lambda}{1+\lambda}\right)$.

3) $\overrightarrow{FK}\left(\frac{1+\lambda}{1+\lambda}+0{,}5;\ \frac{\frac{\sqrt3}{2}\lambda}{1+\lambda}-\frac{\sqrt3}{2};\ \frac{\frac{\sqrt3}{2}\lambda}{1+\lambda}\right)$

4) $\overrightarrow{FK}\cdot\overrightarrow{BG} = 0$

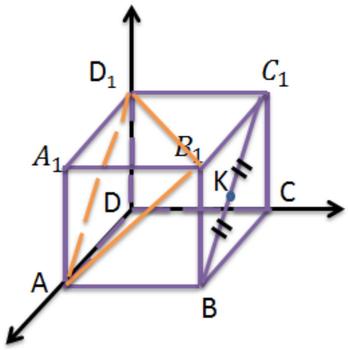
$$\left(\frac{\frac{\sqrt3}{2}\lambda}{1+\lambda}-\frac{\sqrt3}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt3}{2}+\frac{\frac{\sqrt3}{2}\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{\sqrt3}{2} = 0,\ \lambda = 1,\ K\left(1;\frac{\sqrt3}{4};\frac{\sqrt3}{4}\right)$$

5) $\overrightarrow{FK} = \left(1{,}5;-\frac{\sqrt3}{4};\frac{\sqrt3}{4}\right) \Rightarrow |\overrightarrow{FK}| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{16}} =$
$= \sqrt{\frac{21}{6}} = \frac{\sqrt{42}}{4}$

Ответ: $\frac{\sqrt{42}}{4}$

Задача с неполным решением
(допишите недостающие действия, и проверти свои знания)

Дан куб $A\dots D_1$.Длина ребра равна 1.Найти расстояние от середины BC_1 до плоскости AB_1D_1 .



Дано:
$A\dots D_1$ - единичный куб
K-середина BC_1
Найти:$d(K;\ AB_1D_1)$
Решение:
1)Найдем координаты точек $A\dots D_1$;
2)Найдем координаты точки K – середины отрезка BC_1:

$X_K = \frac{0+1}{2} = 0.5$

$Y_K = \frac{\dots + \dots}{2} = \dots$

$Z_K = \frac{\dots + \dots}{2} = \dots$

3)Составим уравнение плоскости AB_1D_1,где $A(\dots)$,$B_1(\dots)$,$D_1(\dots)$.

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 1-0 & \dots & 0-1 \\ \dots & 1-0 & 1-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dots x - \dots y + \dots z - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}\{\dots;\dots;\dots\}$.

4) $d\ (K;\ AB_1D_1) = \dots = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Задачи для самостоятельного решения:

1. Основанием прямой призмы $ABCA_1B1C_1$является равнобедренный треугольник ABC,боковая сторона которого равна $6\sqrt{3}$,а угол ACBравен $120°$. Найдите расстояние от точки Aдо прямой B_1C_1,если известно, что боковое ребро данной призмы равно 12.
Ответ: 15.

2. Длины ребер BC, BB1 и BA прямоугольного параллелепипеда ABCDA1B1C1D1 равны соответственно 8, 12 и 9. Найдите расстояние от вершины D1 до прямой A1C.
Ответ: $\frac{120}{17}$.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ стороны основания которой равны 3, а боковые ребра равны 4, найдите расстояние от точки C до прямой D_1E_1. Ответ: $\frac{\sqrt{91}}{2}$.

4. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите расстояние от точки B до плоскости DEA_1.
Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. Боковое ребро $SA=\sqrt{5}$, сторона основания равна 2. Найдите расстояние от точки B до плоскости ADM, где M — середина ребра SC.
Ответ: 1.

3. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.
Используются формулы:

Координаты x, y, z точки M, которая делит отрезок $\overline{M_1M_2}$, ограниченный точками

M_1(x_1, y_1, z_1) и M_2(x_2, y_2, z_2), в отношении λ, определяется по формулам

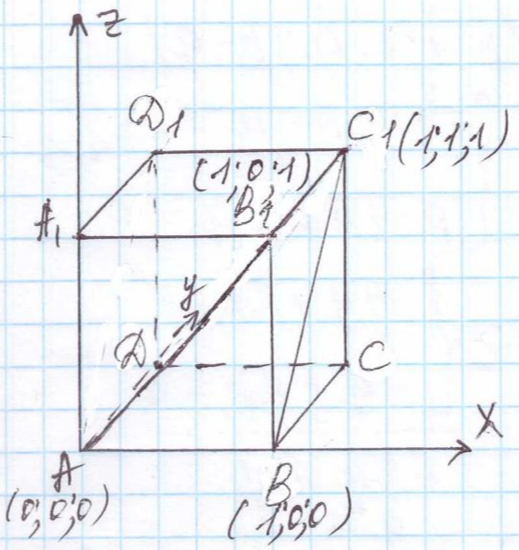
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Если точка M – середина отрезка, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Задача с подробным решением(разберите самостоятельно все представленные шаги и действия решения)

В единичном кубе $A \ldots D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.



Дано: $A \ldots D_1$ – куб.
$AD = \ldots = A_1D_1 = 1$
Найти: $d(AB_1$ и $BC_1)$

Решение:

1) Вычислим координаты (··) A, B_1, B, C_1:
$A(0;0;0)$, $B_1(1;0;1)$, $B(1;0;0)$, $C_1(1;1;1)$.

2) Точка $K \in BC_1$, где $\vec{BC_1}\{0;1;1\}$, тогда (·) $K(x;y;z)$ делит AB в отношении λ (используем формулы для координат точки, делящей отрезок в отношении λ).

$$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1+\lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda \cdot z_2}{1+\lambda}$$

$x = \frac{1+\lambda}{1+\lambda}$, $y = \frac{0+\lambda}{1+\lambda}$, $z = \frac{0+\lambda}{1+\lambda}$, значит $K\left(\frac{1+\lambda}{1+\lambda}; \frac{\lambda}{1+\lambda}; \frac{\lambda}{1+\lambda}\right)$; пусть $q = \frac{\lambda}{1+\lambda}$, значит $K(1;q;q)$

3) $A(0;0;0)$, $B_1(1;0;1)$. Точка $M \in AB_1$, $\vec{AB_1}(1;0;1)$.

$$x = \frac{x_1 + \mu \cdot x_2}{1+\mu}; \quad y = \frac{y_1 + \mu \cdot y_2}{1+\mu}; \quad z = \frac{z_1 + \mu \cdot z_2}{1+\mu}$$

$x = \frac{0 + \mu}{1+\mu}$; $y = \frac{0 + 0 \cdot \mu}{1+\mu}$; $z = \frac{0+\mu}{1+\mu}$, значит

$M\left(\frac{\mu}{1+\mu}; 0; \frac{\mu}{1+\mu}\right)$; пусть $p = \frac{\mu}{1+\mu}$, тогда

$M(p; 0; p)$; $\overrightarrow{KM} = (p-1; 0-q; p-q)$

н) $\begin{cases} \overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{KM} = 0 \\ \overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{KM} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -q + p - q = 0 \\ p - 1 + p - q = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -2q + p = 0 \mid \cdot 2 \\ 2p - q - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow - \begin{cases} -4q + 2p = 0 \\ -q + 2p = 1 \end{cases}$

$-3q = -1$

$q = \frac{1}{3}$

$-2 \cdot \frac{1}{3} + p = 0$

$p = \frac{2}{3}$

Воспользовались скалярным произведением 2-х векторов, которые $\perp$ друг другу.

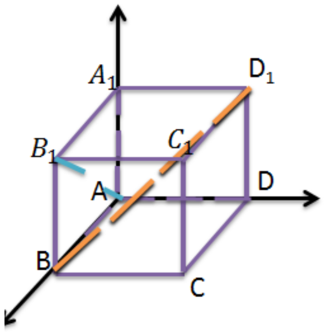
б) $\overrightarrow{KM} \left\{-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\} \Rightarrow |KM| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача с неполным решением
(допишите недостающие действия, и проверти свои знания)

В единичном кубе $A\ldots D_1$ найти расстояние между BD_1 и AB_1.



Дано:
$A\ldots D_1$ – единичный куб
Найти: $d(BD_1; AB_1)$.

Решение:
1)Запишем координаты точек A, D_1,B_1, B.
2)Пусть KM – общий ⊥-яр прямых, т.е. $KM \perp AB_1$, $KM \perp BD_1$.
3)Найдем координаты точек К и М. $K \in AB_1$=>

$X_K=\frac{x_A+\lambda x_{B_1}}{1+\lambda}=\frac{\lambda}{1+\lambda}$

$Y_K=\frac{\ldots+\ldots}{1+\lambda}=\ldots$

$Z_K=\frac{\ldots+\ldots}{1+\lambda}=\ldots$

$=>K(\frac{\lambda}{1+\lambda};\ldots;\ldots)$

Пусть $\frac{\lambda}{1+\lambda}$=p, тогда K(p;…;…)

4) $M\in BD_1$=> $X_M=\frac{x_B+\mu x_{D_1}}{1+\mu}=\frac{1}{1+\mu}$

$Y_M=\frac{\ldots+\ldots}{1+\mu}=\ldots$

$Z_M=\frac{\ldots+\ldots}{1+\mu}=\ldots$

$=>M(\frac{1}{1+\mu};\ldots;\ldots)$

Пусть $\frac{\mu}{1+\mu}$=q => μ=q+ μq => μ- μq=q => μ(1-q)=q => … => M(1-q;q;q).

5)$\overrightarrow{KM}$ {1-q-p;q;q-p} и $\overrightarrow{AB}_1${1;0;1},$\overrightarrow{BD}_1${-1;1;1}

6)т.к. $\overrightarrow{KM} \perp \overrightarrow{AB}_1$ и $\overrightarrow{KM} \perp \overrightarrow{BD}_1$, то

$$\begin{cases}\overrightarrow{KM}*\overrightarrow{AB}_1=0\\ \overrightarrow{KM}*\overrightarrow{BD}_1=0\end{cases}\quad \begin{cases}(1-q-p)*1+q*0+(q-p)*1=0\\ (1-q-p)*(-1)+q*1+(q-p)*1=0\end{cases}$$

$$=> \begin{cases}1-2p=0 \;=>\\ -1+3q=0 \quad q=\frac{1}{3}\end{cases} \begin{cases}p=\frac{1}{2}\\ \frac{\mu}{1+\mu}=\frac{1}{3}\end{cases} => \begin{cases}\frac{1}{1+\lambda}=\frac{1}{2} =>\\ 2\lambda=1+\lambda\\ \lambda=1;\\ 3\mu=1+\mu\\ 2\mu=1\\ \mu=\frac{1}{2}\end{cases}$$

7)Тогда $x_k=\frac{1}{2}$; y_k=0; $z_k=\frac{1}{2}$=>$K(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2})$

$X_M=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$

$Y_M=\frac{\ldots}{2(\ldots)}=\ldots$

$Z_M=\frac{\ldots}{2(\ldots)}=\ldots=>M(\frac{2}{3};\ldots;\ldots)$

8)$|KM|=\sqrt{(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})^2+(\ldots)^2+(\ldots)^2}=\ldots=\frac{\sqrt{6}}{6}$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{6}$

Задачи для самостоятельного решения:

1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1и BC_1.

   Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Дана правильная треугольная призма ABCA1B1C1, все рёбра основания которой равны $2\sqrt{7}$.Сечение, проходящее через боковое ребро AA1 и середину M ребра B1C1, является квадратом. Найдите расстояние между прямыми A1B и AM.

   Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

3. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$,все ребра основания которой равны 2.Сечение, проходящее через боковое ребро AA_1и середину Mребра B_1C_1,является квадратом. Найдите расстояние между прямыми A_1Bи AM.

   Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{7}}$.

4. Угол между двумя прямыми

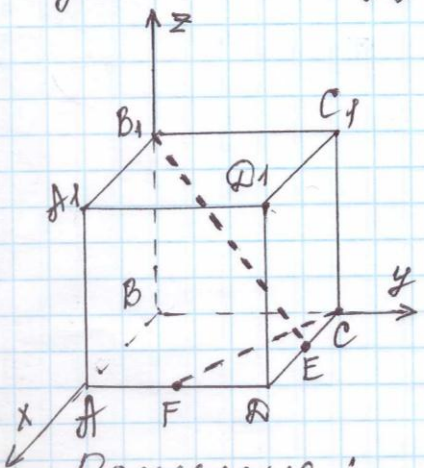
Углом между двумя пересекающимися прямыми называется наименьший из углов, образованных при пересечении прямых.
Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся.
Две прямые называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен 90^0 .
Угол между параллельными прямыми считается равным нулю.
Угол между прямыми это угол между их направляющими векторами

Используется формула:

$$\cos\left(\widehat{\bar{a},\ \bar{b}}\right)=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Задача с подробным решением(разберите самостоятельно все представленные шаги и действия решения)

Сторона основания правильной четырёхугольной призмы $AB \dots C_1D_1$ равна 2, высота 4. (·) E – середина CD (·) F – середина AD. Найдите угол между прямыми CF и B_1E.



Дано: $A \dots D_1$ – прав. 4-я призма

$AD = 2$

$AA_1 = 4$

E – середина CD

F – середина AD

Найти: $CF \wedge B_1E$ – ?

Решение:

1) Выпишем координаты точек A, D, B_1, E, C, F

$A(2;0;0)$, $D(2;2;0)$, $B_1(0;0;4)$, $E(1;2;0)$

$C(0;2;0)$, $F(2;1;0)$.

2) Найдём координаты середин отрезков DC и AD по соответствующим формулам, т.е. $E(1;2;0)$, $F(2;1;0)$

3) $\overrightarrow{CF} = \{2-0;\ 1-2;\ 0-0\} = \{2;\ -1;\ 0\}$

$\overrightarrow{B_1E} = \{1-0;\ 2-0;\ 0-4\} = \{1;\ 2;\ -4\}$

4) Найдём $\overrightarrow{CF} \wedge \overrightarrow{B_1E}$:

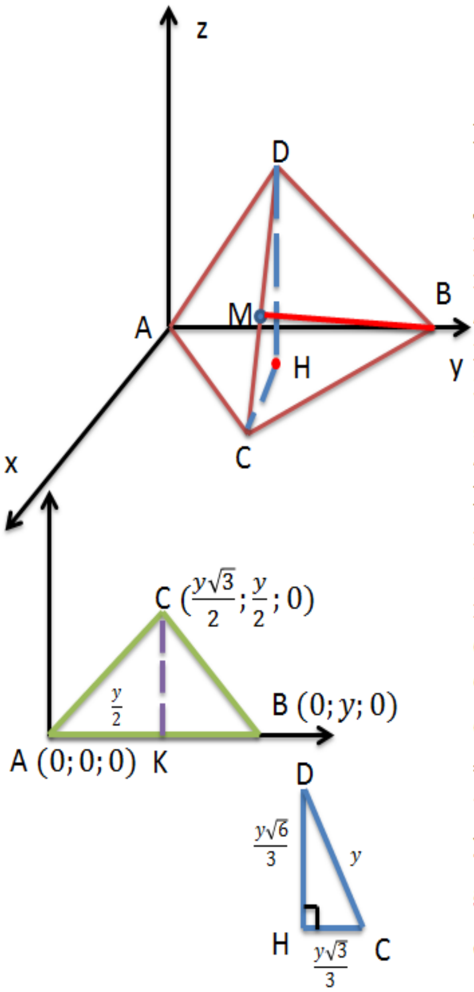
$$\cos(\overrightarrow{CF} \wedge \overrightarrow{B_1E}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} =$$

$$= \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-4)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2}} = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{CF} \wedge \overrightarrow{B_1E}) = \arccos 0 = 90^\circ$$

Задача с неполным решением

(допишите недостающие действия, и проверти свои знания)

В правильном тетраэдре DABC все рёбра равны 1. Найти угол между высотой тетраэдра DH и медианой BM боковой грани CBD.



Дано: DABC - правильный тетраэдр,

AB=...CD=1, DH-высота,BM-медиана грани BCD

Найти: DH^BM

Решение:

1)Поместим тетраэдр в координатную плоскость так, чтобы две его вершины основания т. A и B лежали на оси, например ОУ, тогда т. С вершина основания будет лежать в плоскости ХОУ. Вершина тетраэдра проецируется в центр Δ ABC.

2)Запишем координаты точек А(…) и В(…)

3)Для определения координат т.С, найдём высоту СК в Δ ABC , используя т. Пифагора: СК =…

4)Для определения координат т.Н и для абсциссы т.Д найдём R описанной около правильного ΔABC окружности, используя формулу: $a_3 = R\sqrt{3}$ => R= =… => т.Н(…)

5)Для определения аппликаты т. Д используем т. Пифагора в нахождении ДН из прям. Δ ДСН, где ДН =… => Д(…) =>ДН (…).

6)Найдём координаты т.М – середины отрезка ДС по формулам координат середины отрезка: $x_м = \frac{xс+xД}{2}$; $y_м$ =…; $z_м$ =…=> М(…)=> ВМ {…}

7)Для нахождения угла воспользуемся формулой косинуса угла м/ду векторами: cos (ДН; ВМ) =…=> < (ДН; ВМ) = $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$ (используем понятие угла м/ду двумя прямыми)

Ответ: < (ДН; ВМ) = $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$

Задачи для самостоятельного решения:

1. В правильной шестиугольной пирамиде *SABCDEF* стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между прямыми *SB* и *CD*. Ответ: 60^0
2. Длины всех ребер правильной четырехугольной пирамиды *PABCD*равны между собой. Найдите угол между прямыми *PH*и *BM*,если отрезок *PH* — высота данной пирамиды, точка *M* — середина ее бокового ребра *AP*. Ответ: $\angle BMN = \arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$.

3. Дана правильная треугольная пирамида *DABC* с вершиной *D*. Сторона основания пирамиды равна $\sqrt{6}$, высота равна $\sqrt{30}$. Найдите расстояние от середины бокового ребра *BD* до прямой *MT*, где точки *M* и *T* — середины ребер *AC* и *AB* соответственно. Ответ: $2\sqrt{2}$

5. Угол между прямой и плоскостью

Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой называется угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость.

Угол между взаимно перпендикулярными прямой и плоскостью равен 90^0 .

Если прямая параллельна плоскости (*или лежит в ней*), *то угол между ними считается равным* 0^0 .

Угол между прямой и плоскостью - это угол равный разности 90°−угол между их направляющим вектором и нормалью

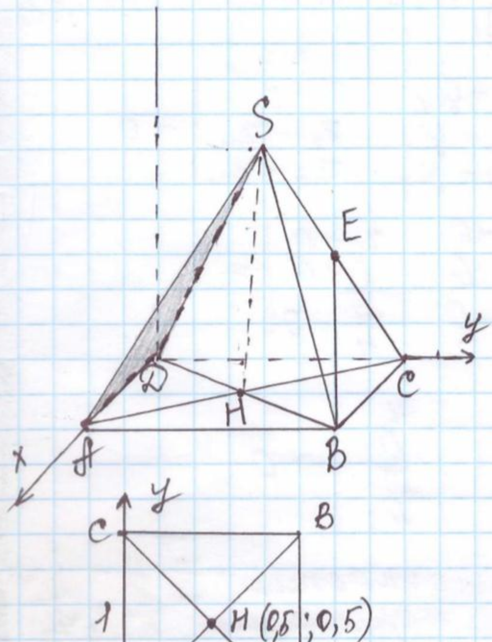
Используется формула:

$$\sin\alpha = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},$$

x_1, y_1, z_1 - координаты направляющего вектора прямой, a, b, c - координаты нормального вектора плоскости.

Задача с подробным решением(разберите самостоятельно все представленные шаги и действия решения)

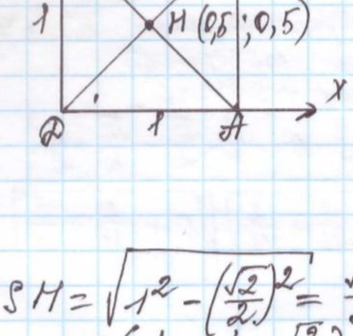
В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD, все рёбра которой равны 1, найдите угол между прямой BE и плоскостью SAD, где E – середина ребра SC.



Дано: SABCD – правильная 4-х угольная пирамида
$E \in SC$.
$SE = EC$
$AB = BC = CD = DA = SD = SC = SB = SA = 1$.
Найти: $\widehat{BE\ SAD}$ – ?

Решение:

1) Выпишем координаты точек $A(1;0;0)$, $B(1;1;0)$, $D(0;0;0)$, $C(0;1;0)$

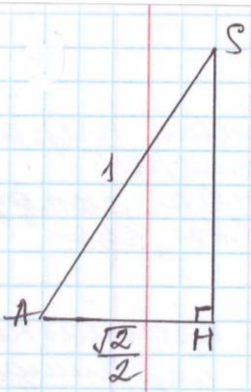


2) Найдём координаты точки H, как точка пересечения диагоналей квадрата $H(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0)$.

3) Координаты точки S найдём из $\triangle ASH$ – прямоуг.

$SH = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, т.к. H – проекция S на ABC.



4) Найдём координаты E — середины SC $\Rightarrow x_E = \frac{x_S + x_C}{2} = \frac{1}{4}$,

$y_E = \frac{3}{4}$, $z_E = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow E\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow BE\left(-\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

5) Составим ур-ие плоскости ADS, если $D(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $S\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 0 \\ 0 - 0 & 1 - 0 & 0 - 0 \\ \frac{1}{2} - 0 & \frac{3}{4} - 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} - 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{vmatrix} = 0$$

6) Запишем ур-ие плоскости: $\frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{1}{2}z = 0$, координаты вектора нормали $\vec{n}\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ — это коэффициенты при неизвестных в уравнение плоскости.

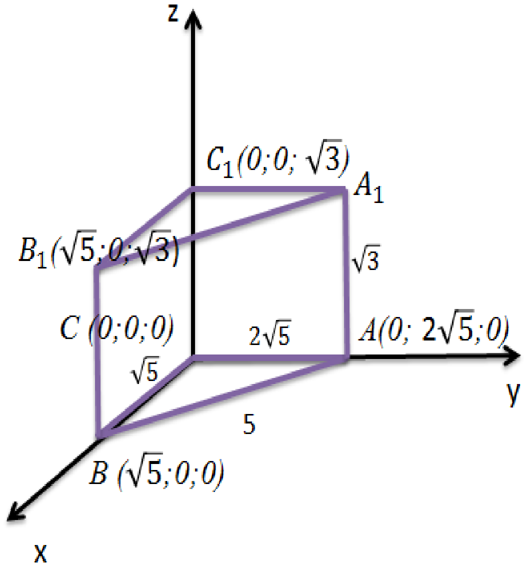
7) $\sin(BE \widehat{\ } SAD) = \frac{|\vec{BE} \cdot \vec{n}|}{|\vec{BE}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\left|-\frac{3}{4} \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{2}\right|}{\left|\sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{16} + \frac{2}{16}}\right| \left|\sqrt{0 + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}}\right|} =$

$= \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow BE \widehat{\ } SAD = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}$

Ответ: $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Задача с неполным решением
(допишите недостающие действия, и проверти свои знания)

Основанием прямой призмы $A\ldots C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB=5 и катетом BC=$\sqrt{5}$. Высота призмы равна $\sqrt{3}$ Найдите угол между прямой BC_1 и плоскостью ABB_1



Дано: $A\ldots C_1$ *прямая треугольная призма.*
ΔABC*- прямоугольный,* $BC=\sqrt{5}$*,* $AB=5$*,*
$AA_1=\sqrt{3}$
Найти: $BC_1 \wedge ABB_1$
Решение: Углом между прямой и плоскостью является угол между этой прямой и нормальным вектором данной плоскости.
Задача сводиться к нахождению $n\{\ldots\}$*- нормального вектора* ABB_1

1) *Найдем катет AC из* ΔABC *по т. Пифагора AC=…*

2) *Запишем координаты точек* $A, B, B_1, C_1\ldots$*;*
3) *Найдем координаты* $C_1B\{\ldots\}$
4) *Составим уравнение плоскости* ABB_1*, проходящей через точки A,B и* B_1 *по формуле*

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-2\sqrt{5} & z-0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \ldots x+\ldots y-\ldots=0-$$

уравнение плоскости $\Rightarrow n\{\ldots\}$
5) *Найдем искомый угол с помощью формулы*
$\sin(BC_1 \wedge ABB_1)=\ldots \Rightarrow BC_1 \wedge ABB_1=\square^0$

Задачи для самостоятельного решения:

1. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра $AB=7\sqrt{3}$, $SC=25$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AS и BC.
   Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{12}{7}$.
2. Длины всех ребер правильной четырёхугольной пирамиды PABCD с вершиной P равны между собой. Найдите угол между прямой BM и плоскостью BDP, если точка M — середина бокового ребра пирамиды AP.

Ответ: $\angle MBN = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$.

3. В правильной шестиугольный призме ABCDEFA'B'C'D'E'F' все ребра равны 1. Найдите угол между прямой AC' и плоскостью ACD'.

   Ответ: $\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}$

4. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра $AB = 7\sqrt{3}$, $SC = 25$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AS и BC. Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{12}{7}$.

5. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, $AB = AC = 5$, $BC = 8$. Высота призмы равна 3. Найдите угол между прямой A_1B и плоскостью BCC_1. Ответ: : $\operatorname{arctg}\frac{3}{5}$.

6. Угол между плоскостями

Двугранный угол, образованный полуплоскостями измеряется величиной его линейного угла, получаемого при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру.

Величина ***двугранного угла*** *принадлежит промежутку* $(0^0, 180^0)$.

Величина угла ***между пересекающимися плоскостями*** *принадлежит промежутку* $(0^0, 90^0]$.

Угол между двумя параллельными плоскостями считается равным 0^0 .

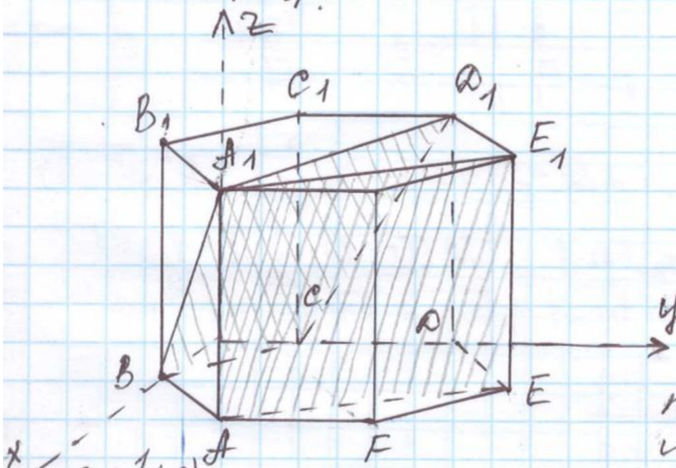
Используется формула:

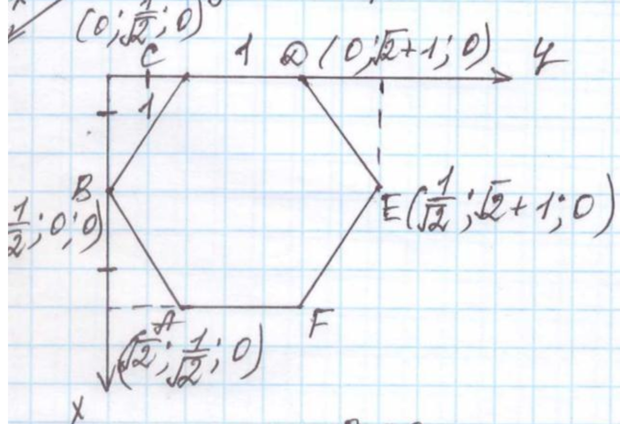
$$\cos\alpha = \frac{|a_1\cdot a_2 + b_1\cdot b_2 + c_1\cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) – координаты нормальных векторов данных плоскостей.

Задача с подробным решением(разберите самостоятельно все представленные шаги и действия решения)

Рёбра основания правильной шестиугольной призмы равны 1. Высота равна 2. Найти косинус угла между плоскостями BA_1D_1 и AA_1E_1.





Дано: $A \ldots F_1$ – правильная 6-ти угольная призма.

$AB = 1$

$AA_1 = 2$

Найти: косинус $(BCD_1 \wedge EAA_1)$

Решение:

$\angle$ между плоскостями – это угол между их нормалями.

1) Получим координаты точек A, B, C, D, E и A_1 – вершин данных плоскостей:

$B(\frac{1}{\sqrt{2}};0;0)$, $C(0;\frac{1}{\sqrt{2}};0)$, $D(0;\sqrt{2}+1;0)$, $E(\frac{1}{\sqrt{2}};\sqrt{2}+1;0)$, $A(\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}};0)$, $A_1(\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}};2)$.

2) Составим ур-ие плоскости BCD_1:

$$\begin{vmatrix} x-\frac{1}{\sqrt{2}} & y-0 & z-0 \\ 0-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}-0 & 0-0 \\ \sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}-0 & 2-0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x-\frac{1}{\sqrt{2}} & y & z \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - z - 1 = 0 \Rightarrow n_1\{\sqrt{2}; \sqrt{2}; -1\}$

3) Составим ур-ие плоскости EAA_1:

$$\begin{vmatrix} x-\sqrt{2} & y-\frac{1}{\sqrt{2}} & z-0 \\ \sqrt{2}-\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}} & 2-0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2} & \sqrt{2}+1-\frac{1}{\sqrt{2}} & 0-0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x-\sqrt{2} & y-\frac{1}{\sqrt{2}} & z \\ 0 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$x(\sqrt{2}+2) + \sqrt{2}y - (1 - 2\sqrt{2} - 2) = 0 \Rightarrow n_2\{\sqrt{2}+2; \sqrt{2}; 0\}$

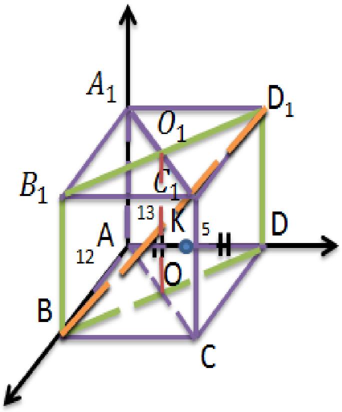
$$\cos(BCD_1 \wedge EAA_1) = \frac{|n_2 \cdot n_1|}{|n_2| \cdot |n_1|} = \frac{|\sqrt{2}(\sqrt{2}+2) \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 1 \cdot 0|}{\sqrt{2+2+1}\sqrt{(\sqrt{2}+2)^2+2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{5}}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{5}}$

Задача с неполным решением
(допишите недостающие действия, и проверти свои знания)

Основание прямой четырехугольной призмы $A\ldots D_1$ — прямоугольник ABCD, в котором AB=12,AD=5.Найдите угол между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1,если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 13.



Дано:

$A\ldots D_1$ - прямая 4-угольная призма

AB=12

AD=5

d (AC и $B_1 D_1$)=13

K-сер. AD

K∈ABC

Найти: $\vec{n}_1\hat{}\vec{n}_2$

Решение:

Пусть:

$\vec{n}_1$- нормаль плоскости ABC

$\vec{n}_2$ –нормаль плоскости $\perp BD_1$

1) Запишем координаты точек B(), D(), D_1().
2) Найдем координаты $\vec{n}_2=\overrightarrow{BD}_1=\{\ldots;\ldots;\ldots\}$.
3) Найдем координаты $\vec{n}_1$ из уравнения плоскости , проходящей через точки B,D,A (XOY)=>…- уравнение плоскости=>$\vec{n}\{\ldots\}$.
4) Найдем $cos(\vec{n}_1\hat{}\vec{n}_2)$=________$=\frac{1}{\sqrt{2}}$ =>$\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$=….

Ответ: …

Задачи для самостоятельного решения:

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$найдите косинус угла между плоскостями BA_1C_1и BA_1D_1.

   Ответ: $\sqrt{\frac{2}{3}}$.
2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$с основанием ABCточка M— середина ребра SA,точка K — середина ребра SB.Найдите угол между плоскостями CMKи ABC,если $SC=8, BC=6$.

   Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{39}}{15}$.

3. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 1 : 2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.
   Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}$.
4. В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD*, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между плоскостью *SAD* и плоскостью, проходящей через точку *A* перпендикулярно прямой *BD*.
   Ответ: : $\sqrt{\frac{2}{3}}$.
5. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 2 : 3$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.
   Ответ: : $\operatorname{arctg} \sqrt{13}$

Литература и интернет –ресурсы

1. Савенков А.И Содержание и организация исследовательского обучения школьников. М.,2003. С.10-1
2. Савенков А.И. Исследовательское обучение и проектирование в современном образовании // Школьные технологии. М.,2004. №4. С. 83-84.
3. Вединеева Н.А. Развитие научно-исследовательской деятельности учителя и учащегося в школьной практике // Оренбург, 2004. №3. С.6-7.
4. Сухомлинский В.А Павлышская средняя школа. М., 1979. с. 106.
5. Райхмист Р.Б. «Задачи по математике».
6. Студенецкая В.Н. «Готовимся к ЕГЭ по математике».
7. Богомолов Н.В. «Практические занятия по математике».
8. Письменный Д.Т. «Готовимся к экзамену по математике».

Ссылки на Интернет-ресурсы

- www.znannya.org - Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Многогранники: виды задач и методы их решения. 18.02.2011
- www.alexlarin.narod.ru - А. Г. Малкова. Подготовка к ЕГЭ по математике.
- Материалы сайта EGE-Study.ru
- Векторы в пространстве и метод координат. Задача С2
- http://reshuege.ru Открытый банк задач (обучающая система Д. Гущина)