Фестиваль исследовательских и творческих работ учащихся

«Портфолио»

Конкурс «Учебный проект»

г. Усолье–Сибирское, Иркутская область

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение

«Гимназия №9»

**Исследовательский проект**

**«**Применение подобия к доказательству теорем и решению задач**»**

Выполнили:

Браценюк Екатерина Александровна ,

Иванова Татьяна Владимировна,

Воеводина Ольга Игоревна,

ученицы 8 «Б» класса

«Гимназия №9»

2016год

ПЛАН

Содержание работы.

1. Введение………………………………………………… ………….3
2. Теоретическая часть……………………………….……………….4
   1. Свойство медиан треугольника
   2. Пропорциональные линии в круге
   3. Обобщенная теорема Фалеса
   4. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике
   5. [Теорема о средней линии треугольника](http://interneturok.ru/ru/school/geometry/8-klass/podobnye-treugolniki/srednyaya-liniya-treugolnika#videoplayer)
3. Практическая часть …………………………………………………8
4. Анализ анкетирования…………………………………………… 11
5. Выводы………………………………………………………………12
6. Литература………………………………………………….………12

Геометрия является самым могущественным средством для изощрения наших умственных способностей и даёт нам возможность правильно мыслить и рассуждать.

Г.Галилей

1. **Введение.**

**Цель работы:** Собрать все теоремы с доказательствами, касающиеся темы о подобии, в один электронный учебник и подобрать к ним соответствующие задачи, чтобы наглядно объяснить их применение.

**Задачи:**

* Выяснить, как признаки подобия используется в доказательствах теорем и решении задач;
* Разобрать задачи, используя доказанные теоремы;
* Собрать все теоремы в один электронный учебник;
* С помощью анкетирования выяснить, насколько помог электронный учебник ученикам.

**Гипотеза:** Мы считаем, что в процессе работы с электронной книгой «Применение подобия к доказательству теорем и решению задач», наши одноклассники лучше смогут разобраться в данной теме.

**Методы исследования**

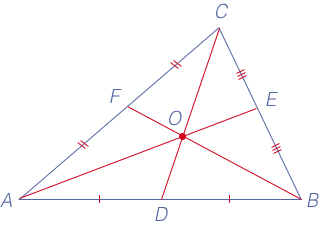
* Теоретический (изучение доказательств)
* Социологический (проведение социологического опроса)
* Практический (создание электронного учебника, подбор задач)
* Творческий (создание буклета)

**Актуальность**

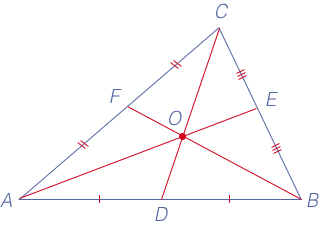
* **Идея подобия треугольников дает эффективный метод решения большого класса задач на доказательство, построение, вычисление.**
* **Доказательство теорем с привлечением подобия значительно проще доказательств, основанных на признаках равенства треугольников.**

**2.Теоретическая часть**

2.1 Свойство медиан треугольника: Медианы треугольника пересекаются в одной точке - центре тяжести треугольника и



делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины угла.



Дано:АВС, AEFBCD=O, AE,FD,CD-медианы.

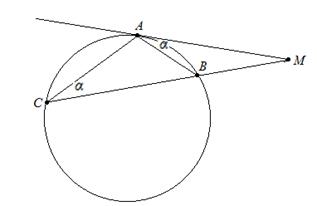
Доказать: 

Доказательство:

1. Проведём прямую FE, параллельную прямой AB.
2. FE- средняя линия (по определению средней линии) ⇒ FE AB, FE∥ AB
3. OFEOBA по первому признаку подобия треугольников (т.к. ∠AOB=∠EOF (как вертикальные углы), ∠EFO=∠OBA (как накрест лежащие углы при параллельных прямых FE, AB и секущей FB) )
4. Из подобия треугольников ⇒(из 2 пункта), отсюда AO=2OE и OB=2OF.
5. Аналогично рассуждая, получим, что DOE=COA⇒ из подобия треугольников  , отсюда CO=2OD.
6. Отсюда .

2.2 Теорема о касательной и секущей:Если из точки, лежащей вне окружности, проведены касательная и секущая, то произведению секущей на ее внешнюю часть равен квадрат длины касательной.

Дано: Окр (O;r), MA- касательная, MC- секущая.



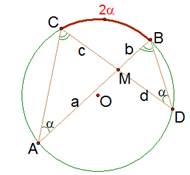
Доказать: MCMBMA

Доказательство:

1. Проведём хорды AC и AB.
2.  ,т.к. 1)∠M- общий, 2)∠ACM(т.к. вписанный угол равен половине дуги на которую опирается) ∠BAM (т.к. угол между касательной и хордой измеряется половиной отсекаемой дуги).
3. (из подобия треугольников).
4. По свойству пропорции MA MCMB (ч.т.д).

**Следствие:** Если из точки M, взятой вне круга, проведено к нему сколько угодно секущих, то произведение каждой секущей на её внешнюю часть есть величина постоянная для всех этих секущих, т.к. для каждой секущей это произведение равно квадрату касательной, проведенной из точки М.

Теорема о пересекающихся хордах: Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.



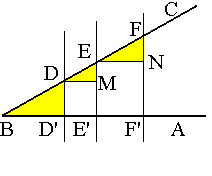
Дано: Окр(О;r), CDABM

Доказать: MAMBMCMD

Доказательство**:**

1. Рассмотрим треугольники и DBM (треугольники подобны по второму признаку) т.к. ∠AMC ∠DMB (как вертикальные), а ∠A∠D(т.к. опираются на одну и ту же дугу BC).
2. Из подобия треугольников ⇒  .
3. По свойству пропорции MAMBMCMD (ч.т.д).

[2.3 Обобщенная теорема Фалеса](http://interneturok.ru/ru/school/geometry/9-klass/itogovoe-povtorenie-kursa-geometrii-za-79-klassy/sravnenie-dlin#videoplayer):Стороны угла, пересекаемые рядом параллельных прямых, рассекаются ими на пропорциональные части. Дано: ∠АВС , DD’∥EE’∥FF’...



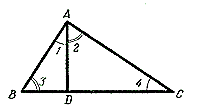
Доказать: …

Доказательство:

1. Проведём прямые DM, EN… , параллельные BA.
2. Получаем BDD’, DEM, EFN … , которые все подобны (т.к. все углы соответственно равны вследствие параллельных прямых).
3. Из подобия ⇒ …
4. Заменив DM на D’E’, EN на E’F’… (т.к. у параллелограмма противоположные стороны равны).
5. ⇒ … (ч.т.д).

* 1. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике: В прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорциональная величина между отрезками, на которые основание перпендикуляра делит гипотенузу, а каждый катет есть средняя пропорциональная между гипотенузой и прилежащим к этому катету отрезком гипотенузы.

Дано: △ABC(∠A=90°), AD⊥BC.



Доказать: AD²=BD DC;

AB²= BC  BD;

AC²= BC DC.

Доказательство:

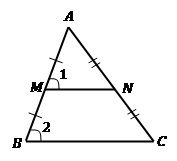
1. По основному свойству углов прямоугольника получаем, что: ∠3=90°- ∠4, ∠4=90°- ∠3 (∠1=90°- ∠3=∠4, ∠2=90°-∠4=∠3).
2. △ABD△CAD(∠1=∠4, ∠3=∠2) по первому признаку подобия ⇒  ⇒ по свойству пропорции AD²=BD DC.
3. △ABCDBA(они прямоугольные и ∠B-общий) по первому признаку подобия⇒ ⇒

по свойству пропорции AB²= BC  BD.

1. ABCDAC (они прямоугольные и ∠C- общий ) ⇒ ⇒ по свойству пропорции AC²= BC DC. (ч.т.д).

***Следствие:*** Пусть А - есть произвольная точка окружности, описанной на диаметре ВС. Соединив концы диаметра с этой точкой, мы получим прямоугольный АВС, у которого гипотенуза есть диаметр, а катет хорды. Применив доказанную выше теорему, приходим к следующему заключению: Перпендикуляр, опущенный из какой-нибудь точки окружности на диаметр, есть среднее пропорциональное между отрезками диаметра, а хорда, соединяющая эту точку с концами диаметра, есть среднее пропорциональное между диаметром и прилежащим к хорде отрезком.

2.5 [Теорема о средней линии треугольника](http://interneturok.ru/ru/school/geometry/8-klass/podobnye-treugolniki/srednyaya-liniya-treugolnika#videoplayer): Средняя линия треугольника па­раллельна основанию и равна его половине. *Дано:* , MA MB, NANC.



Доказать: MN∥BC, MNBC.

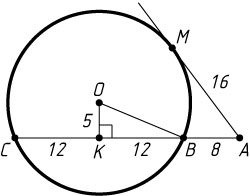
Доказательство:

1. РассмотримBAC: треугольники подобны по второму при­знаку подобия треугольников ( т.к. 1)  , 2) ∠А - общий).
2. ⇒∠1=∠2(как соответственные углы при прямых MN, BC и секущей AB)⇒ MN∥BC(по признаку параллельных прямых) (ч.т.д).
3. ⇒http://static.interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/135981/9c571200_c21e_0131_6fb2_3d765dfd91bb.png( из подобия треугольников) ⇒ по свойству пропорции MN BC (ч.т.д).

**3.Практическая часть**

**1**.Из точки А, не лежащей на окружности, проведены к ней касательная и секущая. Расстояние от А до точки касания равно 16, а до одой из точек пересечения секущей с окружностью равно 32 см. Найти радиус окружности, если секущая удалена от ее центра на 5 см.

Дано: Окр (О; r), АМ-касательная=16, АС=32, ОК=5.



Найти: ОВ

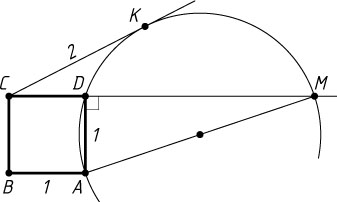
Решение:

1. Пусть секущая пересекает окружность в точках B и C, а M — точка касания. Тогда AM = 16, AC = 32, AB = 32 − BC.
2. ПО теореме о касательной и секущей ⇒ AM² = AC · AB , или 16² = 32(32 − BC).
3. Отсюда находим, что BC = 24.
4. Пусть K — проекция центра O данной окружности на хорду BC. Радиус окружности находим по теореме Пифагора из прямоугольного OKB:

R = OB = = = 13.

Ответ:13.

**2**.Сторона квадрата ABC равна 1 и является хордой некоторой окружности, причём остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Касательная CK, проведённая из вершины C к этой же окружности, равна 2. Найдите диаметр окружности*.*



Дано: Окр (O; r), □ABCD, DA-хорда=1,

СК-касательная=2.

Найти: АМ.

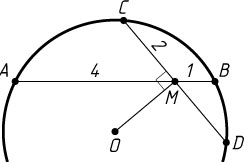
Решение:

1. Пусть AD — хорда окружности, луч CD пересекает окружность в точке M, отличной от D.
2. По теореме о касательной и секущей ⇒ CK²=CM · CD. Отсюда находим, что CM=4⇒ DM=3.
3. Поскольку ∠ADM = 90∘, то AM — диаметр окружности. По теореме Пифагора AM² = AD² + DM² = 1 + 9 = 10, AM = .

Ответ:.

**3**.В окружности с центром проведены хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M, причём AM = 4, MB = 1, CM = 2. Найдите угол OMC.

Дано: Окр(О; r), ABCD= M, AM = 4, MB = 1, CM = 2.



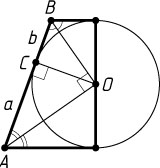
Найти: ∠ OMC.

Решение:

1. Из свойства о пересекающихся хордах ⇒ AM · MB = CM · MD.
2. По свойству пропорции ⇒ MD= =2.
3. т. е. M — середина хорды CD. Поскольку диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде, то ∠OMC = 90.

Ответ: 90

**4**.Дана прямоугольная трапеция. Окружность, построенная на меньшей боковой стороне как на диаметре, касается другой боковой стороны и делит её на отрезки, равные a и b. Найдите радиус окружности.



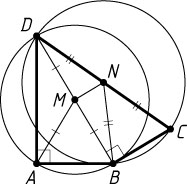
Дано: Окр(О; r), трапеция, ВС=, СА=.

Найти: R.

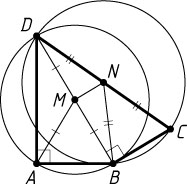
Решение:

1. Радиус, проведённый из центра O окружности в точку C касания окружности с боковой стороной AB, есть высота прямоугольного треугольника AOB, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу.
2. OC² = AC · CB =  (по свойству пропорциональных отрезков в прямоугольном треугольнике).

Ответ:.  
**5**.В четырёхугольнике ABCD известны углы: ∠DAB = 90∘, ∠DBC = 90∘. Кроме того, DB = a, DC = b. Найдите расстояние между центрами двух окружностей, одна из которых проходит через точки D, A, B, а другая — через точки B, C, D.



Дано:2Окр(О;r),∠DAB=90∘,∠DBC=90∘,DB=a, DC=b.(DM=AM=BM;DN=CN=BN).



Найти: MN.

Решение:

1. Центр окружности, проходящей через точки D, A и B есть середина M отрезка DB; центр окружности, проходящей через точки B, C и D — середина N отрезка DC.
2. MN — средняя линия треугольника (по определению средней линии треугольника).
3. По свойству средней линии ⇒ MN =  BC=  = .

Ответ: .

**6**.Две медианы треугольника равны. Докажите, что треугольник равнобедренный.

Дано: АВС, AN,MC- медианы, AN= MC, AN MC=О.

Доказать: ВС=ВА

Доказательство:

По свойству медиан треугольника⇒ OM= ; AO= =OC.

Из доказанного ранее треугольники BON и COM равны по двум сторонам и углу между ними ⇒ АВ=2АМ=2=ВС (ч.т.д).

**7.** Задача по готовому чертежу:

|  |
| --- |
| 8-g-szmr-18-1024 |

Дано: ∠AOF; B,C∈ AO; E,D∈FO; BE∥ CD, BC=6,

CO=4, DE=9.

Найти: OD.

Решение:

1. По теореме Фалеса ⇒ .
2. По свойству пропорции ⇒ OD==6.

Ответ: 6.

**Анализ анкетирования**

Всего было собрано 40 анкет (вопросы анкетирования представлены в приложении1).

**Выводы:**

В результате проделанной работы, мы создали электронный учебник, включающий в себя доказательства теорем и решение задач, по данной теме.

Основываясь на результатах анкетирования, мы полностью подтвердили свою гипотезу, что наша книга может помочь ученикам разобраться в данной теме.

Из литературных источников и Интернета мы узнали, что подобие зародилось еще в древности, об этом свидетельствуют архитектурные памятники.

**Список использованной литературы**

<http://interneturok.ru/ru/school/geometry/8-klass/povtorenie-kursa-geometrii-8-go-klassa/primenenie-podobiya-k-dokazatelstvu-teorem-i-resheniyu-zadach>

<http://www.resolventa.ru/demo/training.htm>

<https://vk.com/doc285561874_437178521?hash=64b4657f36aa0296ea&dl=f0645e30a3a0f8187c>

1. Геометрия, 7-9. Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.В.Кадомцев и др.-М.: Просвещение, 2008.
2. Глейзер Г.И. История математики в школе 7-8 классы: Пособие для учителей.- М.: Просвещение, 1982
3. Зив Б.Г. Дидактические материалы по геометрии для 8 класса. - М.: Дрофа, 2004
4. Зив Б.Г., Мейлер В.М., Баханский А.Т. Задачи по геометрии. - М.: Просвещение, 2000
5. Кукарцев Г.И. Сборник задач по геометрии в рисунках и тестах для 7-9 классов. - М.: Аквариум, 1999
6. Никольский С.Н. Подобные треугольники. – М.//1-ое сентября, приложения «Математика», 1999, №3
7. CD-диск «Открытая математика (планиметрия)» .