Числа совершенные и дружественные

Эвнин Михаил
ученик 7 «В» класса, лицей 82, г. Челябинск

Руководитель: Остапенко Л. П.

1. Совершенные числа

В древнем Вавилоне основанием системы счисления служило число 60, о чём до сих пор напоминает обычай делить час на 60 минут, а минуту на 60 секунд. Число 60 — сравнительно небольшое, но имеет двенадцать различных делителей. Большинство из его делителей получило особые названия, вошедшие в языки разных народов. Например, дюжина (двенадцать). Современные импортные холодильники имеют отделение для хранения дюжины яиц.

Математики древности считали важным рассматривать вместе с каждым числом все его делители. Числа, имеющие много делителей, назывались **избыточными**, а имеющие мало делителей, — **недостаточными**. При этом в качестве меры использовалось не количество, а сумма **собственных** делителей (т. е. делителей, меньших самого числа), которую сравнивали с самим числом. Например, для числа 10 сумма собственных делителей $1 + 2 + 5 = 8$ меньше 10, так что делителей *недостаток.* А для числа 12 имеем:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12,$$

т. е. делителей — *избыток.*

Встречается и пограничный случай, когда сумма собственных делителей равна самому числу. Такие числа назвали **совершенными**.

Наименьшие совершенные числа — 6 и 28:

$$6 = 1 + 2 + 3;$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

Совершенные числа были известны уже в Древнем Вавилоне и Древнем Египте. Вплоть до 5-го века н.э. в Египте сохранялся пальцевый счёт, при котором рука с загнутым безымянным пальцем и выпрямленными остальными изображала 6 — первое совершенное число. Тем самым этот палец как бы сам стал причастен к совершенству и поэтому получил привилегию нести на себе обручальное кольцо. Таково одно из объяснений того исторического факта, что почти у всех цивилизованных народов существует обычай носить кольцо именно на безымянном пальце.

Некоторые люди объясняют совершенство чисел 6 и 28 так. «Разве не за 6 дней был сотворён мир, и разве Луна обращается вокруг Земли не за 28 суток?» — восклицают они.

Следующие пять совершенных чисел таковы:

$$496, \quad 8\,128, \quad 33\,550\,336, \quad 8\,589\,869\,056, \quad 137\,438\,691\,328.$$

Лев Толстой родился 28 августа 1828 г. Номер дня рождения — число совершенное. Если поменять местами первые две цифры в номере года, снова получим совершенное число. Толстой видел в этих совпадениях указание на предназначавшуюся ему судьбой миссию — сделать мир совершеннее. Добавим, что прожил Лев Толстой 82 года — опять имеем перестановку цифр совершенного числа.

Большой вклад в теорию совершенных чисел внёс Евклид в 300 г. до н.э. В его знаменитых «Началах» в книге IX приводится теорема 36, дающая способ получения совершенных чисел.

Теорема. *Пусть число* $2^n - 1$ *— простое. Тогда число* $2^{n-1}(2^n - 1)$ *— совершенное.*

Для доказательства теоремы выведем сначала следующую формулу для суммы последовательных степеней двойки:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Действительно, обозначим $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}$. Тогда

$$2S = 2+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}+2^n = (1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1})-1+2^n = S-1+2^n.$$

Решая уравнение $2S = S - 1 + 2^n$, и получим, что $S = 2^n - 1$.

Кстати, полученная формула имеет отношение к следующей легенде. Древняя легенда расказывает, что персидский царь, познакомившись с игрой в шахматы, пришёл в неописуемый восторг и приказал выдать её изобретателю любую награду, какую тот только пожелает. Изобретатель попросил, казалось бы, весьма скромное вознаграждение: одно зёрнышко пшеницы за первую клетку доски, два — за вторую, четыре — за третью и т. д. За каждую клетку доски он просил вдвое больше зёрен, чем за предыдущую. Награда за последнюю, 64-ю, клетку должна была бы составить $2^{63} = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,808$ зёрен, а всего царь должен был уплатить изобретателю, согласно доказанной формуле, $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1$

зёрен пшеницы, что в несколько тысяч раз превышает годовой урожай пшеницы во всём мире.

Доказательство теоремы. Итак, пусть $p = 2^n - 1$ — простое число. Выпишем все делители числа $k = 2^{n-1}p$:

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad \ldots, \quad 2^{n-1},$$

$$p, \quad 2p, \quad 4p, \quad \ldots, \quad 2^{n-1}p.$$

Сумма этих чисел равна

$$(1+2+4+\ldots+2^{n-1})(1+p) = (2^n-1)(1+p) = (2^n-1)\cdot 2^n = 2\cdot 2^{n-1}\cdot p = 2k.$$

Если вычесть из этой суммы само число k, получим k. Доказано, что k — совершенное число. □

Леонард Эйлер [1] доказал, что любое чётное совершенное число имеет вид из условия теоремы, приведённой выше. Будем называть равенство

$$k = 2^{n-1}(2^n - 1)$$

формулой Евклида.

Заметим, что согласно формуле Евклида совершенное число имеет вид $\dfrac{p(p+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \ldots + p$. Такие числа называют **треугольными**, поскольку выражают собой число точек, расположенных в виде правильного треугольника (в верхнем ряду — одна точка, в следующем — две, далее — три и так далее: в очередном ряду на одну точку больше, чем в предыдущем). Итак, совершенные числа Евклида являются треугольными числами.

А вот ещё одно свойство совершенных чисел: сумма величин, обратных всем делителям совершенного числа, включая его самого, всегда равна 2. Например,

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2;$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = 2.$$

Этот факт легко доказать. Пусть k — совершенное число,
$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_m = k$ — все его делители. Тогда

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_{m-1}} + \frac{1}{d_m} = \frac{d_m + d_{m-1} + \ldots + d_2 + d_1}{k} = \frac{2k}{k} = 2.$$

[1] Л. Эйлер (1707 – 1783) — выдающийся математик. Родился в Швейцарии. Бóльшую часть жизнт провёл в России, являясь членом Петербургской Академии Наук. У него было 13 детей.

В теории совершенных чисел до сих пор не известны ответы на два важных вопроса.

- **Существует ли хотя бы одно нечётное совершенное число?**
- **Существует ли наибольшее совершенное число?**

Несмотря на усилия многих математиков, до сегодняшнего дня не найдено ни одного нечётного совершенного числа, но вместе с тем и не доказано, что такого числа не существует.

Ответ на второй вопрос будет отрицательным, если существует бесконечно много простых чисел вида $M_n = 2^n - 1$, фигурирующих в формуле Евклида. Такие числа называют числами Мерсенна в честь французского математика, жившего в XVII веке. В 1750 г. Леонард Эйлер установил, что M_{31} — простое число. Это число оставалось самым большим из известных простых чисел более ста лет. К 1915 г. было известно 12 простых чисел Мерсенна. Начиная со второй половины прошлого века поиск осуществлялся с помощью компьютеров. Двадцать третье по счёту простое число Мерсенна было найдено в 1963 г. на компьютере Иллинойского университета. Математический факультет этого университета был так горд своим достижением, что изобразил это число ($2^{11213} - 1$) на своём почтовом штемпеле, таким образом воспроизводя его на каждом отсылаемом письме.

В настоящее время известны 33 простых чисел Мерсенна M_n; укажем значения их индексов:

$$n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279,$$

$$2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701,$$

$$23209, 44497, 86243, 110503, 132049, 216091, 756839, 859433.$$

2. Дружественные числа

Большое внимание уделяли в античные времена числам 220 и 284, у которых было подмечено следующее удивительное свойство: сумма собственных делителей числа 220 равна 284 и, наоборот, сумма собственных делителей числа 280 равна 220.

Покажем это. Найдём сумму всех делителей числа 220, не включая самого этого числа:

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284.$$

Аналогично поступим с числом 284:

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$$

Такие числа назвали *дружественными*.

Считают, что первым обратил внимание на дружественные числа Пифагор (ок. 500 г. до н.э.). Многие античные и арабские учёные, а также учёные средневековья посвящали в своих трактатах одну из глав совершенным и дружественным числам. Например, испанец аль-Маджрити (умерший в 1007 г.) приводит рецепт, позволяющий добиться взаимности в любви: надо записать на чём-либо числа 220 и 284, меньшее дать съесть предмету страсти, а большее съесть самому; учёный добавляет, что действенность этого способа он проверил на себе.

Итак, **дружественными** называются такие два числа m и n, что сумма делителей m, не считая самого числа m, равна числу n, а сумма делителей n, не считая самого числа n, равна числу m.

В 1636 г. Пьер Ферма нашёл другую пару дружественных чисел: 17 296 и 18 416. Третью пару нашёл Рене Декарт: 9 363 584 и 9 437 056.

В XVIII веке Эйлер опубликовал список 64 дружественных пар, однако, как показала последующая проверка, в двух случаях он ошибся. В 1830 г. Лежандр нашёл ещё одну дружественную пару, а в 1867 г. 16-летний итальянский юноша Б. Паганини удивил математический мир, объявив, что числа 1184 и 1210 — дружественные. Это была вторая по величине пара, которую все проглядели.

В настоящее время найдено более 1100 пар дружественных чисел. До сих пор неизвестно, конечно ли множество пар дружественных чисел.

3. Заключение

Тема реферата привлекла меня следующим.

Во-первых, о совершенных и дружественных числах знали ещё в древние времена и придавали им иногда мистический смысл. История всегда интересна!

Во-вторых, исследования, связанные с совершенными и дружественными числами, продолжаются и в наше время. Хотя был период, когда эти занятия казались оторванными от жизни. Об этом писал великий Леонард Эйлер: "Из всех проблем, рассматриваемых в математике, нет таких, которые считались бы в настоящее время более бесплодными и бесполезными, чем проблемы касающиеся природы чисел и их делителей. В этом отношении нынешние математики сильно отличаются от древних, придававших гораздо большее значение исследованиям такого рода… А именно, они не только считали, что отыскание истины похвально само по себе и достойно человеческого познания, но, кроме того, совершенно справедливо полагали, что при этом замечательным образом развивается изобретательность и перед человеческим разумом раскрываются новые возможности решать сложные задачи… Математика, вероятно, никогда не достигла бы такой высокой степени совершенства, если бы древние не приложили столько усилий для изучения вопросов, которыми сегодня многие пренебрегают из-за их мнимой бесплодности".

Предвидение Эйлера о том, что исследования в области теории чисел найдут когда-нибудь практические применения, блестяще подтвердилось. Современная криптография (наука о способах кодирования и защиты информации) широко использует результаты, полученные Пьером Ферма, Леонардом Эйлером и другими математиками и связанные со свойствами делимости и с простыми числами.

Таким образом, совершенные и дружественные числа имеют интересную историю, и в то же время являются предметом современных исследований и находят практические применения, связанные с передачей информации между компьютерами.

Библиографический список

[1] Варпаховский А.С. *Тайны совершенных чисел и дружественных пар*// Квант. – 1973. – №10. – С.71–74.

[2] *Введение в криптографию.* — М.: МЦНМО, 1999.

[3] Гарднер М. *Математические новеллы.* — М.: Мир, 1974.

[4] *Живые числа.* /Сб. статей — М.: Мир, 1985.

[5] Оре О. *Приглашение в теорию чисел.* — М.: Наука, 1980.

[6] *Факультативный курс по математике*: Учеб. пособие для 7–9 кл. сред. шк. /Сост. И.Л. Никольская. — М.: Просвещение, 1991.

[7] Эвнин А.Ю. *Элементарная теория чисел: Сборник олимпиадных задач.* — Челябинск: ЧГТУ, 1996. – 76 с.