МУ Управление образования Администрации г. Прокопьевска
Муниципальное образовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа № 51»

Работа на IX научно – практическую

конференцию школьников

«Старт в науку»

КОНСТРУИРУЯ КРАСОТУ ОРНАМЕНТА

(математика)

Автор: Колодиева Елена Анатольевна
11 Б класса

Научный руководитель: Вершинина
Марина Владимировна
Должность: учитель математики,
высшая квалификационная категория

ПРОКОПЬЕВСК 2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Искусство орнамента содержит в неявном виде наиболее древнюю часть известной нам высшей математики.

Г.Вейль

Восхищаясь рукотворной красотой орнаментов, воплощённых в предметах декоративно – прикладного искусства – коврах, гобеленах, вышивке, - я не задумывалась о роли геометрии в создании этих произведений. Между тем сочетание таланта мастера и его геометрических умений занимает важное место в орнаментальном искусстве.

Орнамент (от лат. ornamentum – украшение) – это узор, состоящий из повторяющихся, ритмически упорядоченных элементов. Орнамент предназначен для украшения различных предметов (посуды, мебели, текстильных изделий, оружия) и архитектурных сооружений. Связанный с поверхностью, которую он украшает и зрительно организует, орнамент, как правило, выявляет и подчёркивает своим построением, формой и цветом архитектурные и конструктивные особенности предмета, природную красоту материала.

Объект исследования – геометрический орнамент.

В построении орнамента используют главным образом принцип симметрии. Рассматривая разные композиции, легко увидеть, что орнамент можно продолжать в разные стороны, даже если его первоначальная композиция ограничена и замкнута.

Предмет исследования – конструирование орнамента с помощью законов геометрии.

Цель исследования – изучить конструирование орнаментов и его красоту.

Каждый орнамент содержит какую – нибудь тайну, а я люблю тайны. Если держать книгу обычным способом, то в глаза бросаются нераспустившиеся бутоны незнакомого рисунка, но поверни книгу «вверх ногами», и тот же самый орнамент предстанет совсем другим: я вижу цветок во всей своей красе. Орнамент, как бы вознаграждает меня за догадливость и умение видеть.

Гипотеза : « геометрия как один из разделов математики – это не только стройная система законов, но и уникальное средство познания мира».

Актуальность моей работы, на мой взгляд,в необходимости первоочередного достижения поставленных целей на данном отрезке времени.

Каждый орнамент как человек, чем сложнее рисунок, тем интереснее человек, и если, читая орнамент, окунаешься в мир прекрасного, то, как интересно можно будет использовать это в жизни «купаться» в мире прекрасного. Ради этого стоит жить.

Бордюры и орнаменты

Математик, так же как
художник или поэт, создаёт
узоры.   Г. Харди.

Периодически повторяющийся рисунок на длинной ленте называют ***бордюром****.*
На практике бордюры встречаются в различных видах. Это может быть настенная роспись, украшающая стены зданий, галереи, лестничные переходы. Это может быть чугунное литьё, используемое в оградах парков, решётках мостов и набережных. Это могут быть гипсовые барельефы или керамика.
На рисунке 1 приведены 14 бордюров, разбитых на семь пар. В каждую пару входят бордюры, одинаковые по типу симметрии. ***Всего существует семь типов симметрии бордюров.***
Любой бордюр обладает переносной симметрией вдоль своей оси (вдоль оси переноса). В простейшем случае симметрия бордюра полностью исчерпывается переносной симметрией (рис.1,а). схематически бордюр этого типа показан на рисунке 2 а, где треугольник условно обозначает повторяющийся несимметричный элемент бордюра.
Бордюры, показанные на рисунке 1, б, обладают наряду с переносной также зеркальной симметрией: они зеркально симметричны относительно прямой, делящей ленту бордюра пополам в продольном направлении. Схематически такой тип бордюра показан на рисунке 2,б; здесь ось переноса является также осью симметрии.
У бордюров, показанных на рисунках 1,в и 2,в, ось переноса является осью скользящего отражения.

Бордюры, показанные на рисунке 1,г, имеют поперечные оси симметрии. Эти оси изображены на рисунке 2,г в виде отрезков прямых, перпендикулярных к оси переноса.

На рисунке 1,д показаны бордюры, имеющие поворотные оси 2-го порядка, перпендикулярные к плоскости бордюра. Точки пересечения этих осей с плоскостью бордюра отмечены на рисунке 2, д закрашенными чечевицами.

На комбинировании оси скользящего отражения с поворотными осями 2-го порядка, перпендикулярными к плоскости бордюра, основаны бордюры, изображённые на рисунке 1,е: в результате такого комбинирования возникают поперечные оси симметрии. Схематически этот тип бордюра показан на рисунке 2,е.

Наконец, на рисунках 1,ж и 2,ж представлены бордюры, основанные на комбинировании зеркальных отражений. Такие бордюры имеют наряду с продольной также поперечные оси симметрии; как следствие возникают поворотные оси 2-го порядка.

Трудно найти человека, не любовавшегося ***орнаментами*** *– этими удивительными рисунками, часто встречающимися в декоративном художественном творчестве. В них можно обнаружить затейливое сочетание переносной, зеркальной и поворотной симметрией. За примером орнамента не надо далеко ходить – взгляните на рисунок обоев, которыми оклеены стены вашей комнаты.*

Некоторые образцы орнаментов показаны на рисунках 3 – 5. среди них два созданы известным современным голландским художником Эшером – орнаменты «Летящие птицы» (рис.3) и «Ящерицы» (рис.5).

В основе любого орнамента лежит одна из пяти плоских решёток. ***Тип плоской решётки определяет характер переносной симметрии данного орнамента.*** *Орнамент «Летящие птицы» основан на* ***косой*** *решётке, характерный египетский орнамент, показанный на рисунке 4, основан на* ***квадратной*** *решётке, а орнамент «Ящерицы» - на* ***гексагональной*** *решётке.*

В простейшем случае орнамент характеризуется только ***переносной симметрией.*** *Таков, например, орнамент «Летящие птицы». Чтобы построить этот орнамент, надо выбрать соответствующую косую решётку, «заполнить» элементарную ячейку решётки определённым рисунком и затем многократно повторить этот рисунок за счёт переносов ячейки без изменения её ориентации. На рисунке 6 элементарная ячейка орнамента заштрихована. За-*

метим, что площадь ячейки равна сумме площадей, занимаемых изображениями птиц разного цвета.

На рисунке 7 рассмотрена симметрия египетского орнамента. Переносная симметрия орнамента определяется квадратной решёткой, элементарная ячейка которой выделена на рисунке 7,а. эта ячейка имеет поворотные оси 2-го порядка, обычные и скользящие оси симметрии. На рисунке 7,б сплошными прямыми показаны обычные оси симметрии, а штриховыми – скользящие. Точки пересечения поворотных осей 2-го порядка с плоскостью орнамента обозначены закрашенными чечевицами. В отличие от орнамента «Летящие птицы» данный орнамент обладает более высокой симметрией, о чём свидетельствует наличие ***поворотных*** *осей, а также обычных и скользящих осей* ***зеркальной симметрии.***

Симметрия египетского орнамента будет ещё более высокой, если упростить его окраску – вместо красного и синего цветов использовать один цвет, например красный. В этом случае дополнительно появляются поворотные оси 4-го порядка и, кроме того, увеличивается число скользящих осей симметрии. Симметрия такого орнамента показана на рисунке 7,в, где закрашенными квадратиками обозначены точки пересечения поворотных осей 4-го порядка с плоскостью орнамента.

Рисунки 7,б и 7,в содержат полную информацию о характере симметрии соответствующих орнаментов. Если на этих рисунках убрать узор, сохранив лишь обозначения обычных и скользящих осей симметрии, а также точек пересечения поворотных осей с плоскостью орнамента, то получатся ***схематические*** *изображения двух разных типов симметрии орнаментов.* ***Всего существует 17 типов симметрии плоских орнаментов.*** *Они приведены на рисунке 8. Здесь толстые прямые линии изображают обычные оси симметрии, а штриховые – скользящие. Для обозначения точек пересечения поворотных осей с плоскостью орнамента используются чечевицы (оси 2-го порядка), треугольники (3-го порядка), квадратики (4-го), шестиугольники (6-го). Орнамент, показанный на рисунке 7,б, представлен на рисунке 8 позицией 9, а орнамент, показанный на рисунке 7,в, - позицией 12; орнаменту «Летящие птицы» отвечает позиция 1.*

В принципе любой орнамент можно построить так, как строился орнамент «Летящие птицы»: посредством параллельных переносов заполненной определённым рисунком элементарной ячейки. Такой способ построения орнамента *является единственным в том случае, когда орнамент не обладает ни поворотной, ни зеркальной симметрией. В остальных случаях возможны иные способы построения орнамента; при этом в качестве исходного изображения (как говорят, **основного мотива**) используют не всю элементарную ячейку орнамента, а лишь часть её.*

Обратимся к египетскому орнаменту, показанному на рисунке 4. в качестве основного мотива этого орнамента может быть выбрано изображение в пределах прямоугольника, однократно заштрихованного на рисунке 7,а (площадь прямоугольника составляет одну восьмую площади элементарной ячейки орнамента). Этот основной мотив показан отдельно на рисунке 9,а. для построения орнамента воспользуемся осями симметрии BC и DE, показанными на рисунках 7,в и 9, а также поворотной осью 2-го порядка, проходящей через точку А. Зафиксируйте точку А и оси BC и DE на плоскости рисунка и, используя основной мотив (рис.9,а), будем выполнять отражения относительно BC и DE и повороты на 180° вокруг А в любой последовательности и сколь угодно долго. Поворот вокруг А превращает рисунок 9,а в рисунок 9,б; последующее отражение относительно BC приводит к рисунку 9,в. Затем производим отражение относительно DE (получаем рисунок 9,г), новый поворот на 180° вокруг А (получаем рисунок 9,д), новое отражение относительно BC и т.д. По мере выполнения поворотов и отражений орнамент как бы расцветает на наших глазах, всё более и более заполняя площадь рисунка.

Рассмотрим египетский орнамент с упрощённой раскраской (рис.7,в). Теперь в качестве основного мотива можно выбрать изображение в пределах квадрата, заштрихованного в клеточку на рисунке 7,а. Для построения орнамента воспользуемся поворотной осью 4-го порядка и осью симметрии BC(рис.10).Предлагаем читателю самостоятельно выполнить это построение.

***Орнамент «Ящерица».** Весьма интересен орнамент «Ящерицы» (рис.5). Он представляет собой мозаику, составленную из совершенно одинаковых изображений ящериц. Ящерицы плотно уложены на поверхности орнамента (без промежутков или накладок). Эта мозаика обладает не только переносной, но и **поворотной** симметрией. Переносная симметрия орнамента определяется гексагональной решёткой, а поворотная – наличием поворотных осей в точках A, B, C, D, E, F, G, H и др. (рис.11,а).Порядок поворотных осей зависит от расцветки орнамента. В случае **трёхцветного** орнамента (используются ящери-*

цы трёх разных цветов) все поворотные оси имеют 2-й порядок (рис.11,б). ***Одноцветный*** *орнамент наряду с поворотными осями 2-го порядка имеет также оси 3-го и 6-го порядков (рис.11,в). Зеркальной симметрией орнамент «Ящерицы» не обладает. Тип симметрии одноцветного орнамента отвечает позиции 16 на рисунке 8, а трёхцветного – позиции 2.*

При построении одноцветного орнамента «Ящерицы» можно выбрать в качестве основного мотива изображение, находящееся в пределах треугольника AGH (рис.11,в). Нетрудно видеть, что этот треугольник составлен из частей изображения одной ящерицы; его площадь равна площади, занимаемой изображением ящерицы. Для построения орнамента можно воспользоваться поворотной осью 6-го порядка (ось A) и поворотной осью 3-го порядка (ось H). Изображённый на рисунке 11,в основной мотив будем поворачивать на углы 60° вокруг A, а затем (после совершения полного оборота вокруг A) будем поворачивать полученное изображение вокруг точки H на углы 120°.

В случае трёхцветного варианта основной мотив орнамента задаётся уже не треугольником AGH, а треугольником ABC, содержащим составные части всех трёх разноцветных изображений ящериц (рис.11,б). Для построения орнамента можно воспользоваться поворотными осями 2-го порядка, проходящими, например, через точки D, E, F.

Геометрические паркеты.

Паркет (или мозаика) – бесконечное семейство многоугольников, покрывающее плоскость без просветов и двойных покрытий. Иногда паркетом называют покрытие плоскости правильными многоугольниками, при котором два многоугольника имеют либо общую сторону, либо общую вершину, либо совсем не имеют общих точек; но мы будем рассматривать как правильные, так и неправильные многоугольники. Итак, какими же многоугольниками можно замостить плоскость?

Паркеты из одинаковых правильных многоугольников.

Сумма всех углов n – угольника равна 180°(n –2). Все углы правильного много угольника равны; следовательно, каждый из них равен 180°(n –2)/n. В каждой вершине паркета сходится целое число углов; поэтому число 2·180° должно быть целым кратным числа 180°(n –2)/n. Преобразуем отношение этих чисел:

$$\frac{2\pi n}{\pi(n-2)} = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$$

Разность n – 2 может принимать лишь значения 1, 2 или 4; поэтому n может быть равно только 3, 4 или 6. Значит, можно получить паркеты, составленные из правильных треугольников, квадратов или правильных шестиугольников (рис 12).

Паркеты из разных правильных многоугольников.

Сначала выясним, какое количество различных правильных многоугольников (с одинаковыми длинами сторон) может находиться вокруг каждой точки. величина угла правильного многоугольника должна находиться в интервале от 60°до 180° (не включая); следовательно, число многоугольников, находящихся в окрестности точки, должно быть больше 2 (360°/180°) и не может превышать 6 (360°/60°).*

Можно сказать, что существуют следующие способы уложить паркет комбинациями правильных многоугольников: (3, 12, 12); (4, 6, 12); (6, 6, 6); (3, 3, 6, 6) – два варианта паркета; (3, 4, 4, 6) – четыре варианта; (3, 3, 3, 4, 4) – четыре варианта; (3, 3, 3, 3, 6); (3, 3, 3, 3, 3, 3) (цифры в скобках – обозначения многоугольников, сходящихся в каждой вершине: 3 – правильный треугольник, 4 – квадрат, 6 – правильный шестиугольник, 12 – правильный двенадцатиугольник). Некоторые варианты паркета показаны на рисунке 13.

Паркеты из неправильных многоугольников.

Легко покрыть плоскость параллелограммами (рис. 14). Вообще можно замостить плоскость копиями произвольного четырёхугольника, необязательно выпуклого (рис. 15). Можно составить паркет из копий произвольного треугольника: из двух равных треугольников можно сложить параллелограмм, и покрыть плоскость копиями этого параллелограмма (рис. 16).

*Ещё плоскость можно покрыть копиями центрально – симметричного шестиугольника, или копиями пятиугольника с двумя параллельными сторонами. До сих пор не найдены все типы выпуклых пятиугольников, из которых складываются паркеты. Зато доказана теорема, утверждающая: «Нельзя сложить паркет из копий выпуклого семиугольника». В тоже время существуют паркеты из невыпуклых семиугольников (рис.*17*):*

Паркеты из произвольных фигур.

Некоторые определения паркета не ограничиваются многоугольниками; в этом случае паркетом называется покрытие плоскости без пропусков и перекрытий заданными фигурами (в частном случае – многоугольниками, правильными или неправильными, выпуклыми или невыпуклыми). В таком случае даже для паркетов из многоугольников может не соблюдаться требование «два многоугольника должны иметь общую вершину, общую сторону или совсем не иметь общих точек»; кроме того, появляется множество разнообразных паркетов, состоящих не из многоугольников, а из криволинейных фигур. Рассмотрим способы построения нового паркета, исходя из этого «расширенного» определения. Итак, как нарисовать паркет? (некоторые из возможных способов).

Способ первый. *Берём некоторую сетку (уже известный нам паркет) – из правильных треугольников, шестиугольников, квадратов, или из произвольных многоугольников, и выполняем преобразования: сжатие/растяжение, замена прямолинейных отрезков кривыми с началом и концом в тех же точках, что и у кривых отрезков… Пример: паркеты, полученные заменой отрезков «квадратной» сетки некоторыми кривыми или ломаными (рис.*18*):*

Способ второй. *Объединяем отдельные элементы уже существующих паркетов. Примеры: паркеты, полученные в результате объединения элементов квадратной сетки, можно увидеть на рис. 19. Паркет, каждый элемент которого получен в результате объединения пяти правильных треугольников, можно увидеть на рис. 20.*

Способ третий. *Берём существующую сетку и дополняем её новыми линиями. Получаем разбиение плоскости на фигуры, которые затем можно по-новому объединить. В частном случае – накладываем, друг на друга две (или более) сетки уже известных паркетов, смещая или поворачивая одну сетку относительно другой; фигуры, образовавшиеся при пересечении линий, считаем элементами паркета. Пример: разбиения сетки из греческих крестов видим на рис. 21.*

Способ четвёртый. *Выбираем некоторую кривую или ломаную и начинаем её переносить на некоторый вектор, поворачивать, отражать… получившиеся кривые или ломаные размещаем на плоскости таким образом, чтобы они образовали замкнутые контуры (которые в дальнейшем будут рассматриваться как элементы паркета). Если рассматривать только незамкнутые кривые и ломаные, паркеты будут напоминать полученные способом № 1. Для получения следующего паркета была взята дуга спирали, три раза повёрнута на 90°, а затем к получившейся фигуре был применён параллельный перенос (рис. 22). А вот паркеты полученные с помощью параллельного переноса звёздчатых многоугольников, можно увидеть на рис. 23.*

Символические «тексты» Афрасиаба.

Сегодня приходится заново открывать включать в контекст современной культуры тот факт, что орнаментация в прошлом не сводилась к декоративной отделке, а была универсальным графическим «языком», отличным от письменности и хорошо понятным широким слоям населения. Элементами такого «языка» являлись отдельные знаки, символически выражающие принципиальные качества микро- и макрокосмоса. Композиции знаков образовывали символический «текст», «прочтение» которого открывает знание о культуре прошлого, часто не доступное для других научных методов. Память о забытых «языках» символов сохранилась лишь в очагах народного ремесла, где ещё помнят значение орнаментальных знаков на ковре, сюзане, ганчевой панели и т. п.

В известной нам истории Средней Азии нет другого городского центра, сопоставимого по своей историко-культурной значимости с Афрасиабом – древним городским центром с двухтысячелетней культурой в границах современного Самарканда. Поэтому выявление и «прочтение» символических «текстов» Афрасиаба – исключительно важная задача постижения древней культуры.

К настоящему времени систематические раскопки на Афрасиабе выявили множество артефактов орнаментированной керамики и архитектурного декора. Наше внимание привлекли две группы археологических находок – керамические блюда с хорошо узнаваемой богатой орнаментацией, расписанные цветными ангобами, покрытые глазурью и датирующиеся IX - XII вв.

Одна из главных черт орнамента афрасиабских панелей – тотальное заполнение их пространства изображениями растительных элементов (рис.24). Устремлённые вверх и в стороны ростки с листками (крины) заполняют здесь все пустоты между геометрическими построениями. Для орнаментации панелей так же, как и для керамических блюд, характерно воплощение идеи распространения («произрастания») растительных форм из некоторого центра (центрические композиции: 3-, 4-, 6-частные). Похоже, что этим декларировалась жизненность, вечность природно-растительных сил, от которых зависит *благополучие людей на Земле. Такой орнамент был своеобразной графической «молитвой», адресованной добрым божественным силам, несущим плодородие. В центре одной из панелей находятся два наложенных один на другой трёхлепестковых цветка, что соответствует древнему «трёхточечному» знаку плодородия, одному из символов Анахиты. Причём характерной особенностью этой композиции является то, что ростки в центре отмечены «точками» - семенами, источниками произрастания. Ещё два панно имеют центром композиции шестиконечную звезду, образованную наложением двух треугольников (звезда Давида), фиксирующую 6 лучей произрастания растительных элементов. Интересно, что практически тот же тип 6-частной растительной композиции, включая использование звезды Давида, чеканился на множестве монет Золотой Орды.*

Приверженность жителей древнего Самарканда культу вечной растительной, природной силы, наряду со средневековой афрасиабской символикой подтверждается существованием на Афрасиабе трёх исламских культовых мест, возникших около X-XI вв. Это мемориал Шахи-Зинда, связанный с культом Кусама ибн Аббаса, признанного «неумирающим царём», мечеть Хазрет-Хызра, связанная с «кадамжоем» этого вечного странника, испившего, по преданиям, живой воды, а также мазар и родник святого Ходжи Данияра, обладающего свойством «расти» в могиле.

Несколько панелей, относимых к декору одного зала, имеют в качестве доминирующего знакового символа «свастику» (рис.25). Это хорошо известный символ Солнца, солнечной энергии. Представлены как округлая (колесообразная) четырёх- и трёхлучевая свастика «вертун», признаваемая символом вращения, циклического космического движения, так и традиционная прямоугольная свастика, символ Солнца как источник света и космического огня (тепла). Здесь геометрически правильная «сетка» из свастики заполняет всю поверхность, декларируя мощь и значимость единого энергетического поля сил Солнца. Ячейки орнаментальной сети «свастик» также заполнены растительными символами, утверждая единство и взаимосвязь двух положительных сил Космоса (растительные силы природы и космическая энергия Солнца). Та же идея присутствует на многих афрасиабских блюдах, где в центре орнаментальной композиции расположен свастикоподобный знак, из которого берут начало сложные узоры сплетающихся растительных линий. Это явно указывало на Солнце как на источник плодородия и жизни в целом. Даже сегодня в Самаркан-

де можно встретить жилища, на фасаде которых, а также при оформлении колонн, дверей изображены символические знаки Солнца (солярные розетки), датируемые XVIII- XX вв.

Содержание символических «текстов» Афрасиаба соответствует основным идеям известной нам восточно-иранской доисламской религиозной традиции, к которой относятся и области доисламского Согда. Центральными божествами здесь признавалась пара: Митра – бог Солнца и Анахита – богиня плодородия. Синонимичными оказываются и древнетюркские представления о божественной паре: мужском божестве Неба (Тенгри) и женском божестве Земли. В абстрагированной символике Афрасиаба как бы произошла деантропоморфизация культовых представлений. Сущность идеи и их символы остались, а их традиционные носители – «языческие» божества как бы исчезли, что, видимо, и отражает утверждение единобожия ислама, в котором «нет Бога кроме Аллаха».

Принципиально новым, не характерным до этого времени для культур Средней Азии знаковым элементом, появившимся на афрасиабских панелях, являются 6- и 8-угольные звезды, что, похоже, отражает прорыв в области прикладной геометрии в рамках исламской научной традиции. Не исключено, что в это время через исмаилитов или иудеев происходит передача в регион ближневосточных семантических идей. Характер использования символа шестиугольной звезды указывает на то, что этот знак был связан с сакральными силами плодородия, что соответствует более архаичным представлениям о женском божестве Земли Анахиты и т.п. Тогда восьмиугольная звезда, судя по всему, связана с Солнцем. Поскольку число «8» символизирует устойчивость, равновесие, стабильность, то, возможно, в афрасиабской композиции 8-лучевая звезда – символ вечного Солнца как источника энергии мироздания. Это подтверждается тем, что во втором зале дворца, где доминирует солнечный знак свастики, центральное место занимает большое панно с 8-лучевой звездой. В обоих случаях использования восьмилучевых звёзд на афрасиабских панелях эти звёзды вписаны в восьмилепестковые цветки, как бы напоминающие о более древней традиции изображения солярных символов в виде ромашек.

Ещё одной принципиальной чертой орнаментации как на ганчевых панелях, так и на керамических блюдах, является принцип «сплетения». Основные фигуры орнамента переплетены между собой так, что если бы они были реально изготовлены, то оказались бы неотделимы одна от другой. Этим выражается *идея слитности, соединённости главных знаковых элементов макрокосмоса: растительности, Солнца, Земли. В древней индоевропейской религиозно-мифологической традиции символика узлов была связана с космическим божеством Варуной – богом Луны и Воды, властителем магических «уз». Обратим внимание на то, что большая часть афрасиабских панелей имеет декоративный волнообразный кант – узнаваемый символ воды.*

Двумя наиболее простыми композициями «плетёнки» оказались соединения круга и квадрата с крестообразной фигурой, образовавшие четырёхчастные знаки: 1 – Солнца и растительности, 2 – Земли и растительности. Сочленение этих добрых по отношению к человеку сил мироздания символически противостояло враждебным силам, обеспечивая благополучие. «Плетеные» композиции, практически тождественные афрасиабским, стали характерным явлением орнаментации древнерусского искусства X – XIII вв. Интересен в экспозиции Эрмитажа многократно повторенный четырёхчастный квадратный «плетёный» знак на миланских рыцарских доспехах XVI в. (рис.26)

Здесь он – явно основной оберег металлического панциря. На этой же основе возник новый знак – «плетёнка счастья», характерный символ монетного чекана Золотой Орды. Он же целенаправленно используется в декоре мавзолея Кусам ибн Аббаса в Шахи-Зинда. Более сложной является четырёхугольная знаковая композиция, воплощённая в четырёх орнаментальных решениях афрасиабских панелей. Её прямоугольный «каркас» символизирует «вспаханную» (разбитую на участки) землю, солнечные знаки по сторонам – постоянное присутствие и движение Солнца, а четырёхчастные растительные знаки по углам – произрастание в четырёх направлениях. Геометрическая сложность афрасиабских панелей – первое известное свидетельство «взрывного» рождения «архитектурного орнамента нового стиля, чьё быстрое развитие отмечено рядом других выдающихся памятников, в которых этот стиль на протяжении XI – XII вв. получил наивысшее развитие. Космологические «тексты», скрытые в семантике декора дворца Саманидов, - свидетельство качественно нового религиозного мироощущения, возникшего с утверждением в Средней Азии ислама, пока ещё не имеющего жёсткой канонизации и адаптирующего традиционные «языческие» представления.

Общая идеология такой «языческой» орнаментации – создание единого сакрального поля знаков, символизирующего объединение «добрых», побеждающих сил макрокосмоса и утверждающего идеи повсеместности и распростра-

нения охраняющих сил. Фольклорная традиция сохранила убеждение, что подобное знаковое поле является оберегом, т.е. способностью защитить человека, его жилище от магии «сил зла». Причём в орнаментацию керамических блюд Афрасиаба кроме «языческих» немусульманских символов вошли арабские благопожелательные надписи. Видимо, считалось, что блюдо, содержащее соединенные в одно целое добрые «языческие» солярные и растительные символы, а также мусульманские благопожелания, было вдвойне защищённым. Магические, охранительные качества геометрического и растительного орнамента оставались сущностными чертами орнаментации исламского искусства вплоть до позднего средневековья. Только в новое время общеисторические процессы десакрализации культуры свели это явление к декоративности. Важным моментом представляется общее знаковое поле, обнаруженное на пространстве от Средней Азии до Древней Руси в период X – XIV вв., что воплотилось в орнаментальных артефактах памятников архитектуры, ремесла, монетном чекане Саманидов, Караханидов, Булгар, Хорезма и домонгольской Руси, Золотой Орды. Ранее уже удалось выявить наличие в культуре Саманидов развитых традиций мандалической символики, используемой также в Индии, Тибете и Китае. Такая общность культовой символики различных исторических культур ставит проблему определения её истоков. Поскольку рассматриваемые сакральные знаки имеют достаточно развитую геометрию, трудно допустить возможность параллельного и схожего знакового развития в таких географически удалённых одна от другой культурах. Тогда приходится предположить сохранение некоторого достаточно обширного евразийского сакрально – культового единства, допускающего культурную ассимиляцию и обмен. Таким «каналом» ретрансляции мог быть единый торговый коридор шёлкового пути, о чём свидетельствует огромное число находок саманидских монет в Европе. Действительно, торговля тканями и другой орнаментированной продукцией ремесла предполагает, что семантика знаков орнамента признаётся покупающей стороной.

Двумерные покрытия в искусстве.

В далёкие времена древности человек ещё не владел тем уровнем знаний, который доступен ему сейчас. Возможно, что попытки разгадать тайны законов создания регулярных построений родили особую область искусства – искусство орнамента.

***Византийская** мозаика представляет собой одно из древнейших достижений по созданию симметричных периодических замощений плоскости (рис.27). Хотя условие периодичности могло возникнуть как некоторая независимая задача, практические цели архитектурного оформления требовали создания орнаментов именно такого типа. Одна или небольшое число плиток одной и той же формы должны были создавать основной элемент покрытия. Элемент орнамента должен был иметь возможность неограниченного продолжения, так чтобы, в конце концов, замостить любую часть плоскости.*

Наиболее сильное развитие орнаментальной техники произошло в мусульманском искусстве. Элементарные ячейки орнаментов сильно усложнились (рис.28). Требование периодичности вынуждало художников проявлять особую изощрённость при создании рисунка. Даже присутствие пятиугольных и семиугольных элементов не привело к отступлению от периодической структуры покрытия.

Сейчас неизвестны апериодические мозаики квазикристаллического типа в Средней Азии, хотя существовало много различных способов построения правильных пятиугольников и звёзд, один из них приведён на рис.29.

Если обратиться только к геометрическим особенностям орнаментов, то в мавританском дворце в Альгамбре (Испания) содержится уникальное собрание различных видов покрытий. Именно здесь был обнаружен орнамент с симметрией 5-го порядка. Почему именно здесь художник решился (или захотел) отойти от периодической симметрии и как он к этому пришёл – одна из загадок, решение которой заслуживает своего места в истории науки. Примеры орнаментов с симметрией 5-го порядка приведены на рис.30. Рядом с ними в той же технике для сравнения приведён орнамент с симметрией 4-го порядка. Рисунки показывают, что художники свободно владели техникой образования неперио-

дического пентагонального орнамента. По-видимому, им была известна решётка Аммана, которая и служила трафаретом для создания орнамента.
В 1977 году Роберт Амман открыл несколько новых апериодических покрытий, описание которых появилось в литературе только в публикации. Решётка Аммана представляет собой систему параллельных линий 2 π/5, 4 π/5, пятикратно повёрнутую на углы… расстояние между линиями соответствует числам Фибоначчи. Система этих линий отчётливо видна на рис.28.
Так же, как и в орнаментах Средней Азии, рисунок создавался с помощью геометрических построений пятиугольника (рис.31). В основе приведённой мозаики лежат всего три элемента (если не считать формы промежутков между ними) теперь орнамент создаётся уже не с помощью одинаковых плит с одинаковым рисунком, а путем плотной упаковки нескольких элементов определённой формы. Одно из важных достижений художников из Альгамбре Состояло в экспериментальном доказательстве существования плотной упаковки (и далеко не единственным способом). Тем самым фантазия художника получила значительно большую свободу, чем он имел, создавая периодические орнаменты.
Интересно отметить, что Альбрехт Дюрер создал свой вариант построения правильного пятиугольника. Известны также его попытки замостить плоскость пятиугольника, и какими- либо ещё элементами. Однако структуры типа решётки Аммана им не были найдены.
Трудно было бы обойти искусство Мориса Эшера. Существует множество аспектов, в которых его творчество вызывает исключительный интерес математиков, искусствоведов и дизайнеров. Об этом свидетельствуют, в частности, материалы конференции, посвящённой его творчеству. Многие из картин Мориса Эшера использовали одну или несколько плиток для создания порой очень сложных орнаментов, относящихся к так называемой цветной симметрии (рис.32). С помощью того же приёма Эшер пытался обнаружить переход из одной симметрии в другую.

Задачи.

Задача № 1. *Найдите площадь звёздчатого многоугольника TKRSLXEYZWQU на рисунке 1, приняв за 1 длину отрезка AB (рис. 1)*

Решение: *Многоугольник TKRSLXEYZWQU состоит из треугольника ZTL площадью S1 и трёх равных треугольников KRS, XEY, WQU. Обозначим их площадь через S2. Основание ZL треугольника ZTL равно 3 и высота равна3, значит, S1=4,5. Площади малых треугольников найдём как части параллелограммов. Так, треугольник KRS является половиной параллелограмма KRPS, у которого основание 1 и высота 1.Тогда S2=0,5; 3·S2=1,5.Итак, S = S1 + 3S2 = 4,5 + 1,5 = 6. Ответ: 6*

Задача № 2. *Дворец в Термезе (XII в.) украшен орнаментом, который воспроизводится на рисунке 2. Воспользовавшись вспомогательной сеткой, найдите площадь квадрата A1B1C1D1, приняв длину отрезка AB за 1.(рис. 2)*

Решение:

*Сторона A1B1 является диагональю прямоугольника размерами ¾*¼ тогда A1 B1 =* $\sqrt{\frac{9}{16} \pm \frac{1}{16}}$ $= \frac{\sqrt{10}}{4}$ *, а площадь квадрата A1B1C1D1 равна 10/16, или 5/8.*

Ответ: 5/8

Задача № 3. *Каков порядок поворотных осей симметрии розеток на рисунке 3?*

Решение: *На рисунке 3, а – поворотная ось 8-го порядка, на рисунке 3,б – поворотная ось 6-го порядка, на рисунке 3,в – поворотная ось4-го порядка.*

Ответ: а) поворотная ось 8-го порядка, б) 6-го порядка, в) 4-го порядка.

Задача № 4. *Найдите площадь «креста», ограниченного замкнутой ломаной TSXRLZPNWMFY и расположенного в центре афрасиабской панели (рис. 4), приняв сторону квадрата A1B1C1D1 за 1.*

Решение: *Сторона квадрата ABCD равна 1/2 . искомая площадь креста получится, если от площади квадрата ABCD (она равна ½) отнять площади восьми равных треугольников MBF, FYT, …, MWN. Они прямоугольные и равнобедренные. Обозначим их катеты через x, а гипотенузы – через y. Тогда* $2x^2 = y^2$. *Поскольку BM + MN + NA = x + y + x = BA, т.е.* $2x + y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *. Получаем систему:*

$$\begin{cases} \sqrt{2}x = y \\ 2x + y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 < x < \sqrt{2}\ 2 \\ 0 < y < \sqrt{2}/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x = y \\ 2x + \sqrt{2}x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 < x < \sqrt{2}\ 2 \\ 0 < y < \sqrt{2}/2 \end{cases}.$$

Решив её, получаем:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2(2+\sqrt{2})} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}. \qquad S_{MBF} = \frac{1}{2}x^2.$$

$$8 \cdot S_{MBF} = 8 \cdot \frac{1}{2}x^2 = 4\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4} = (\sqrt{2}-1)^2.$$

$$S_{\text{креста}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - (\sqrt{2}-1)^2 = 2\sqrt{2} - 2,5.$$

Ответ: $2\sqrt{2}-2,5$

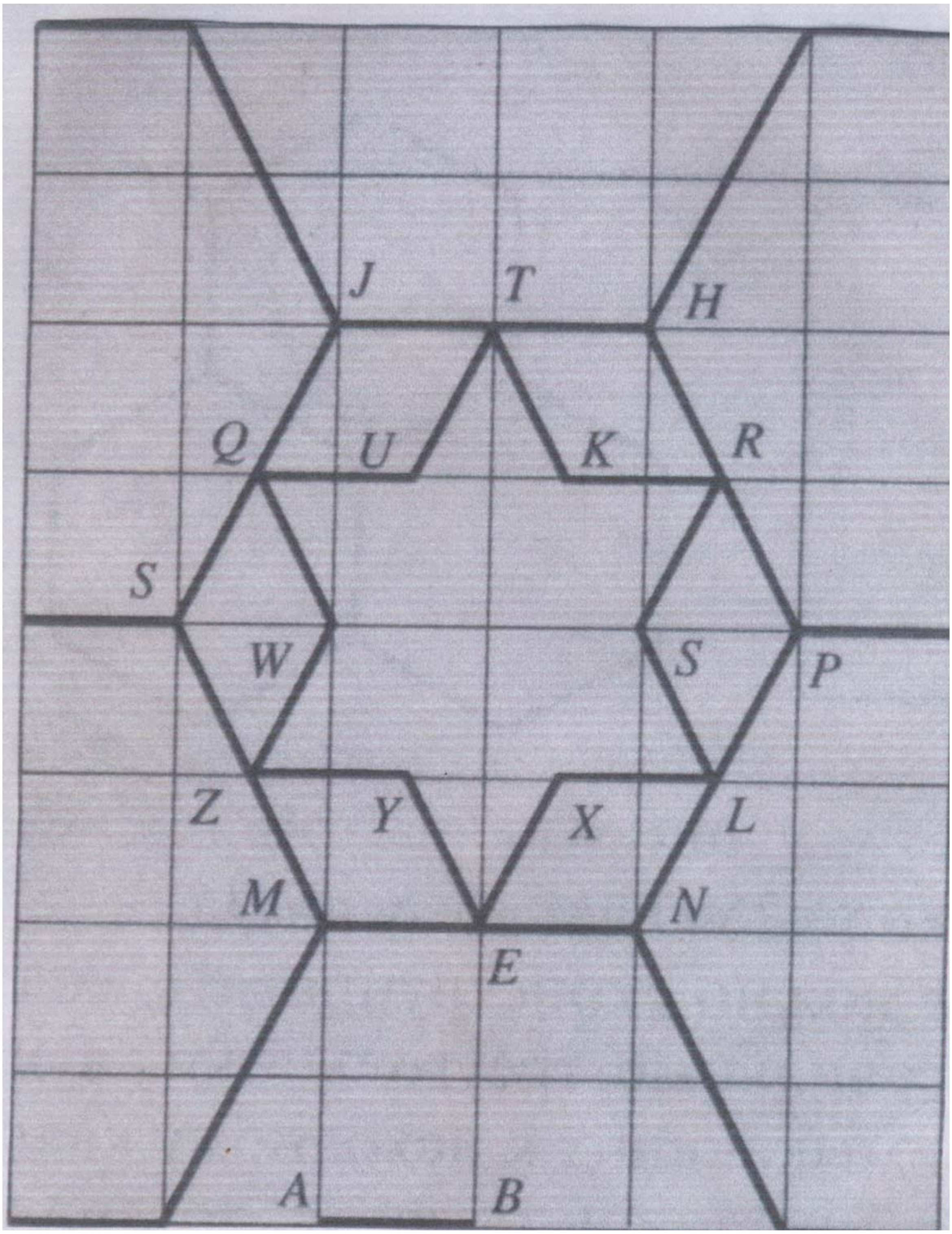
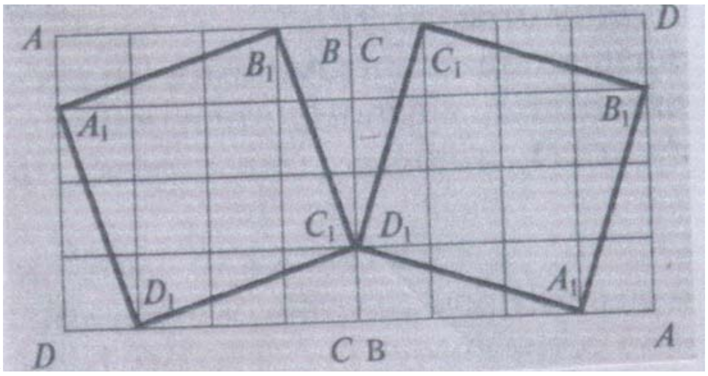


Рис. 1.



.

Рис. 2.

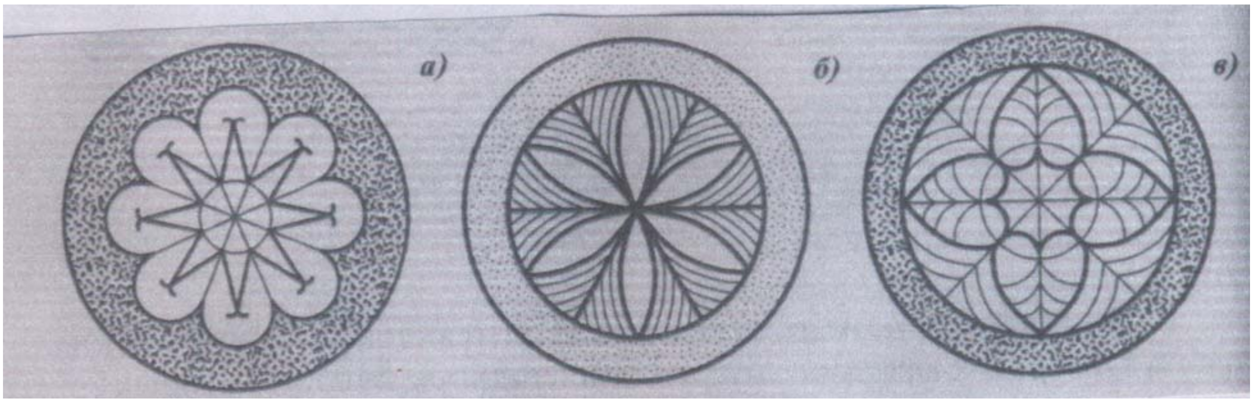


Рис. 3.

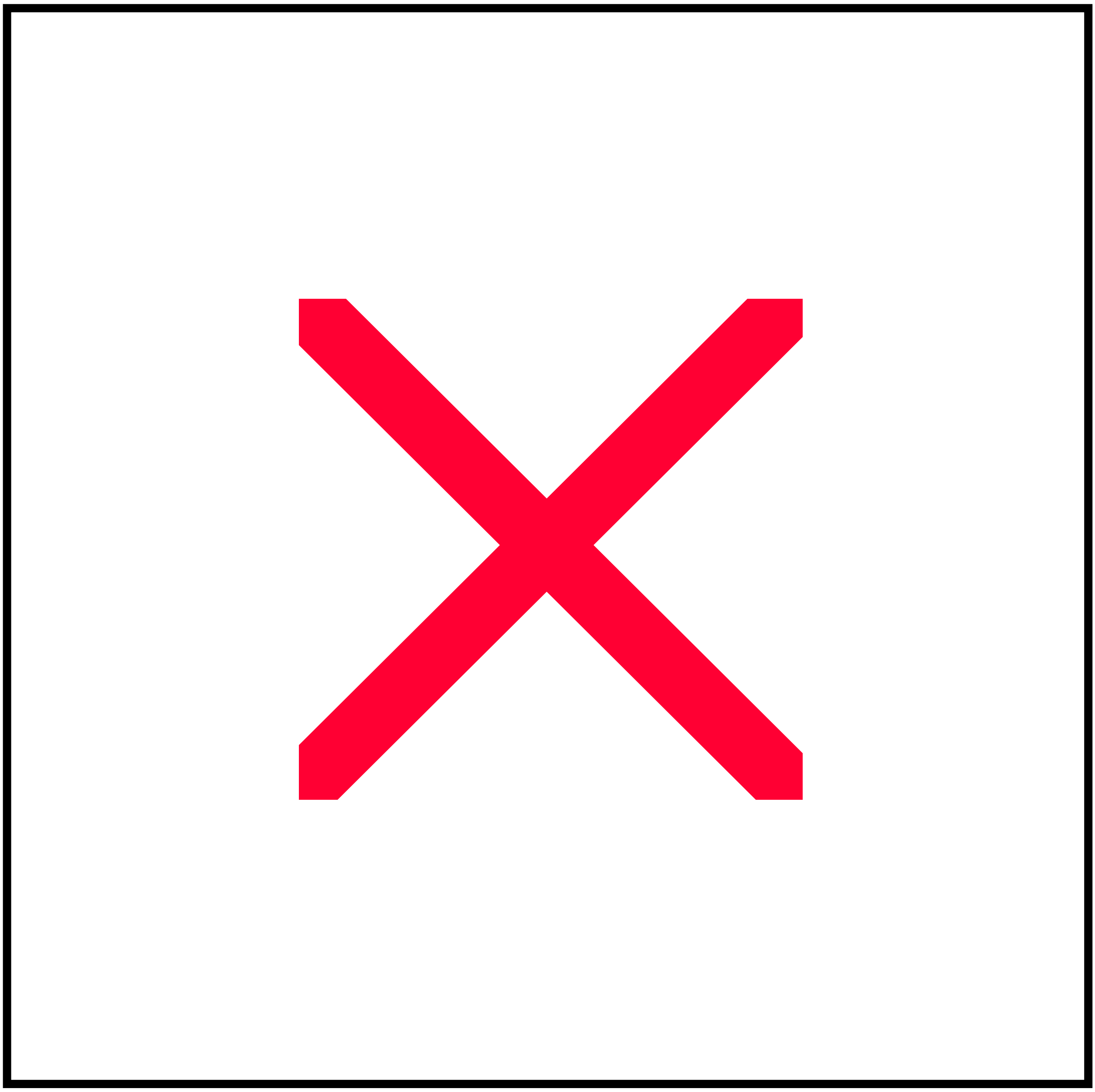
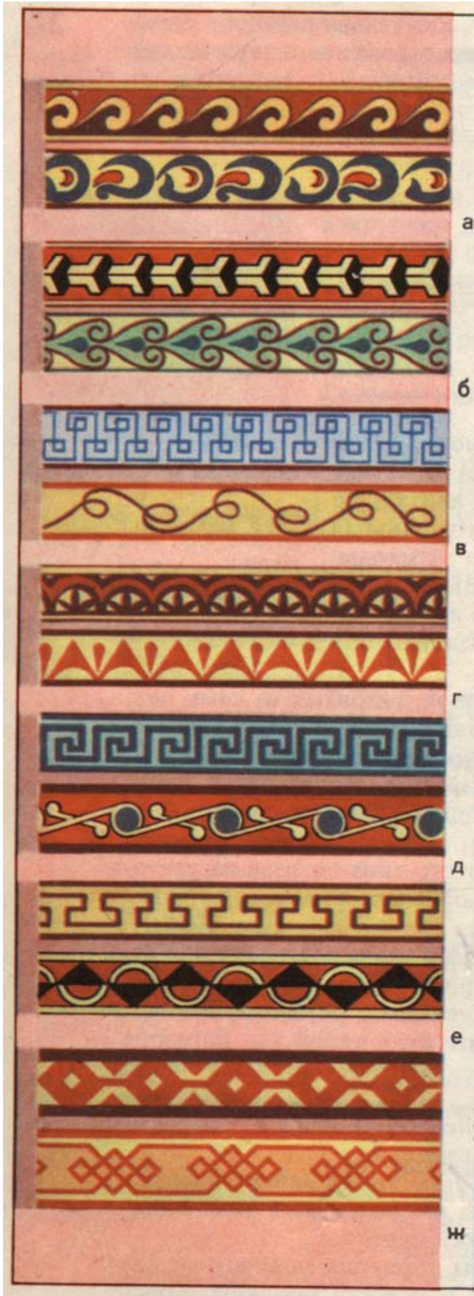


Рис. 4.

Приложение.



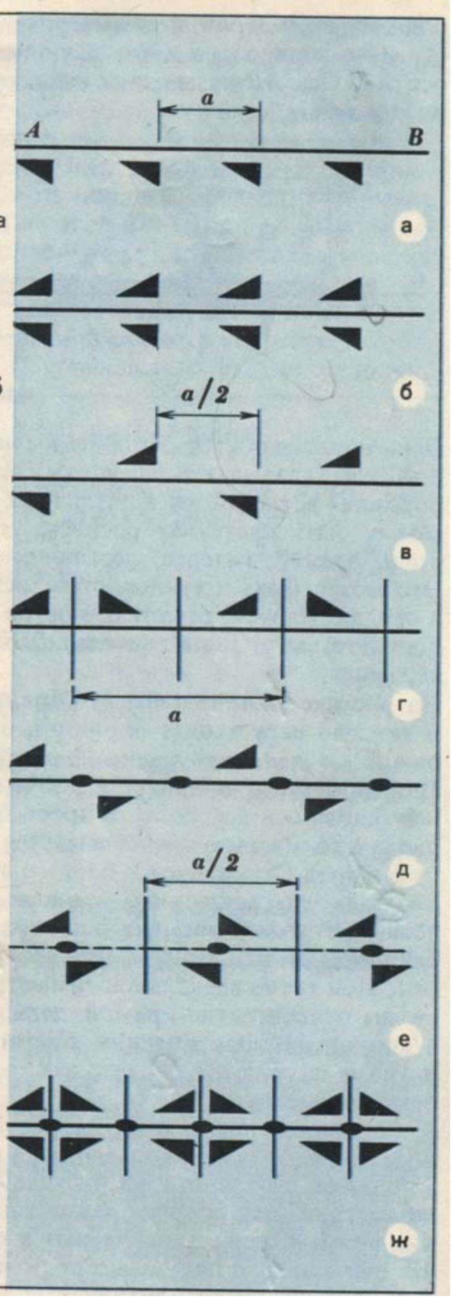


Рис.1 Пример симметрии бордюров.

Рис.2 Пример симметрии Бордюров.

Рис.3 Пример орнамента «Летящие птицы».

Рис.4 Пример египетского орнамента.

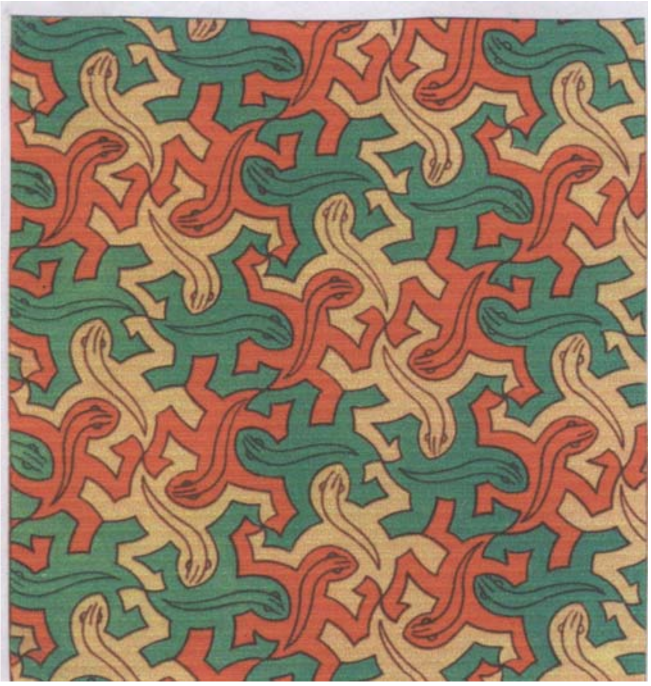


Рис.5 Пример орнамента «Ящерицы».

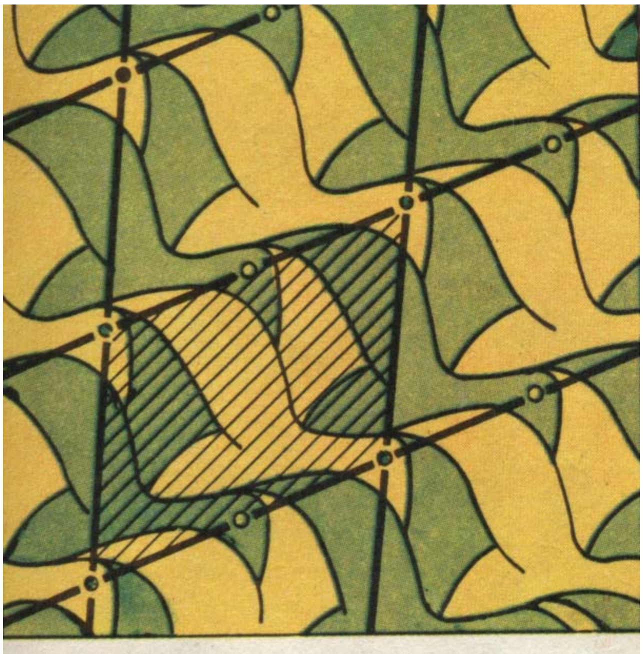


Рис.6 Пример разборки орнамента «Летящие птицы».

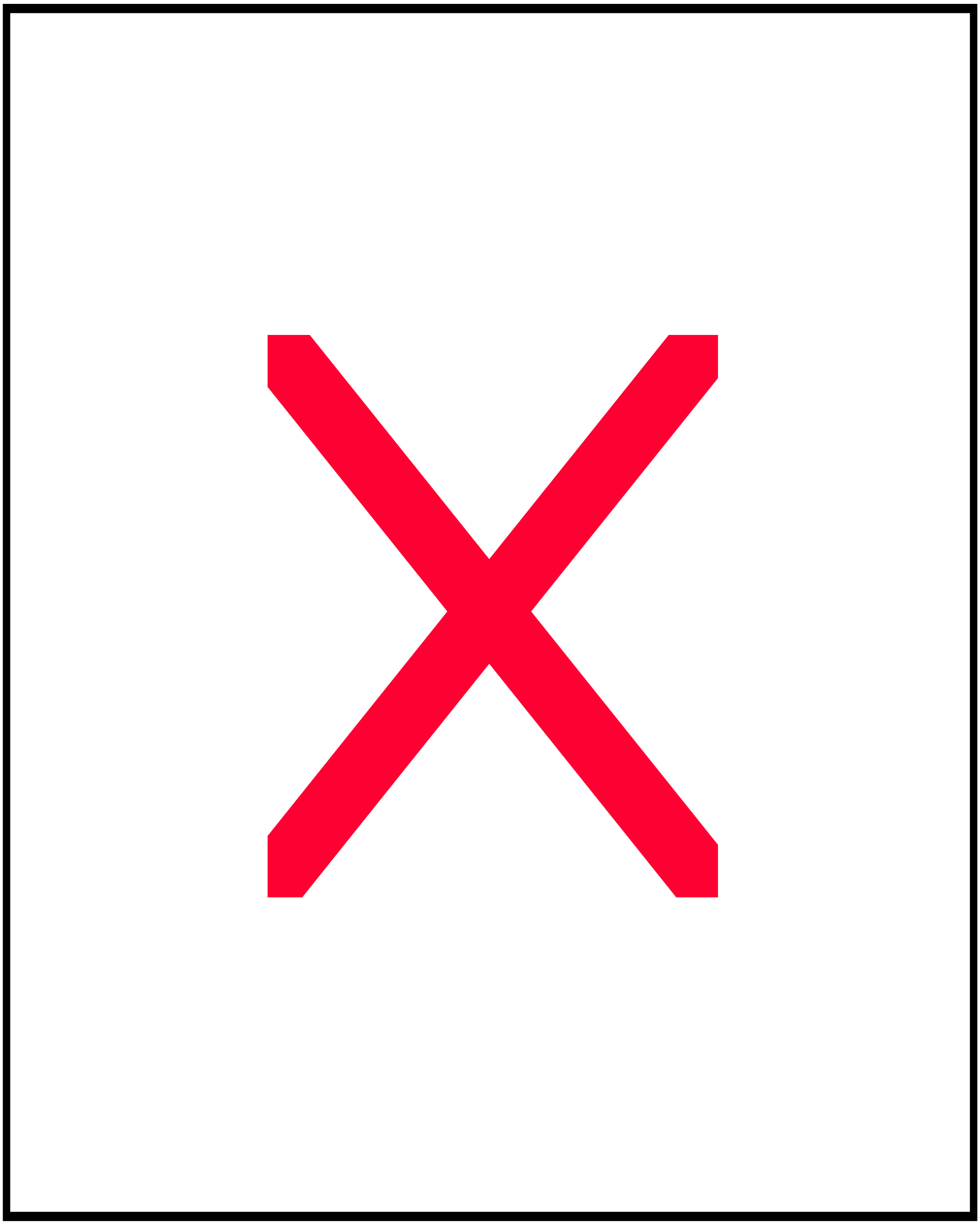


Рис.7 Пример симметрии египетского орнамента.

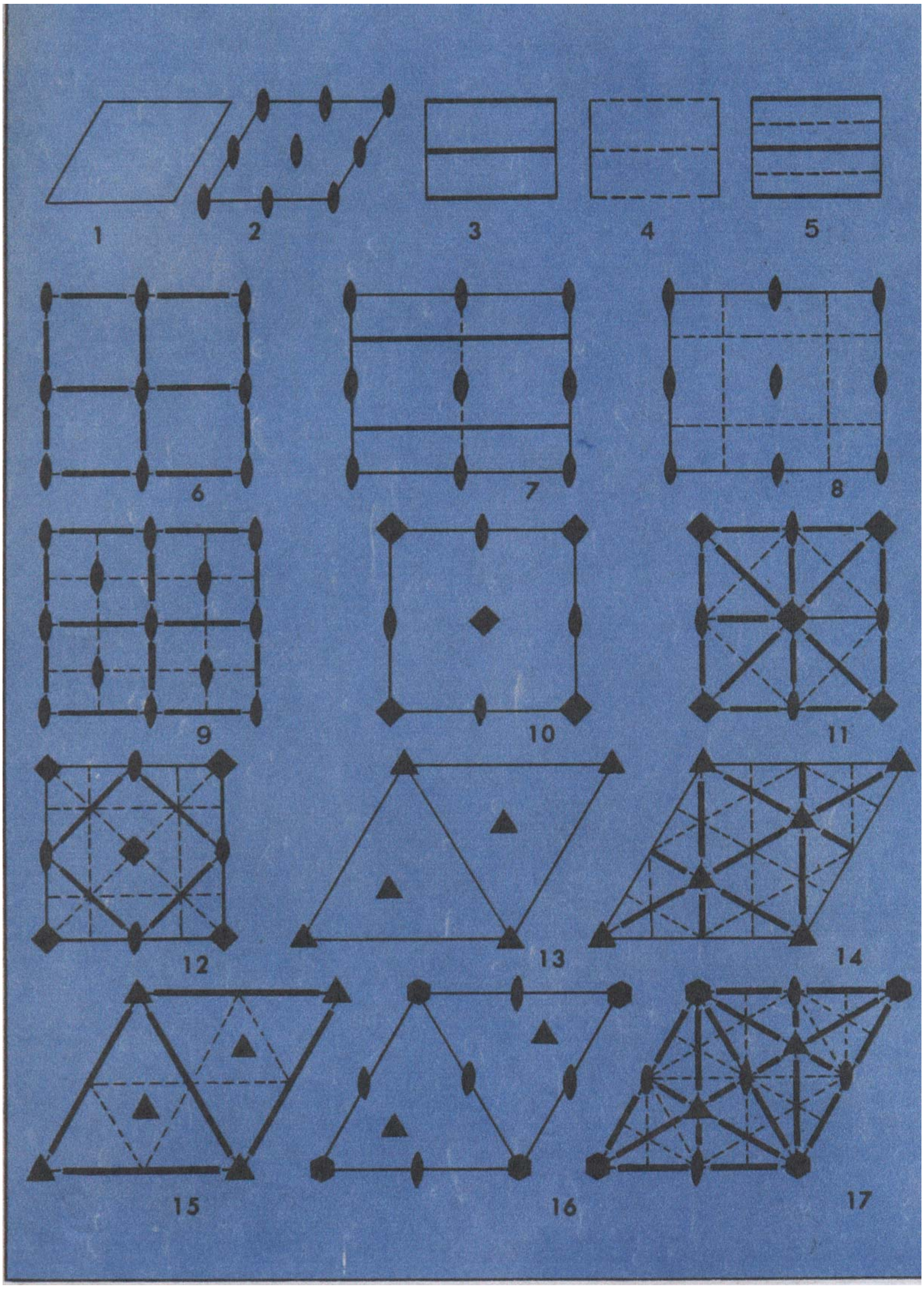


Рис.8 Пример симметрии плоских орнаментов.

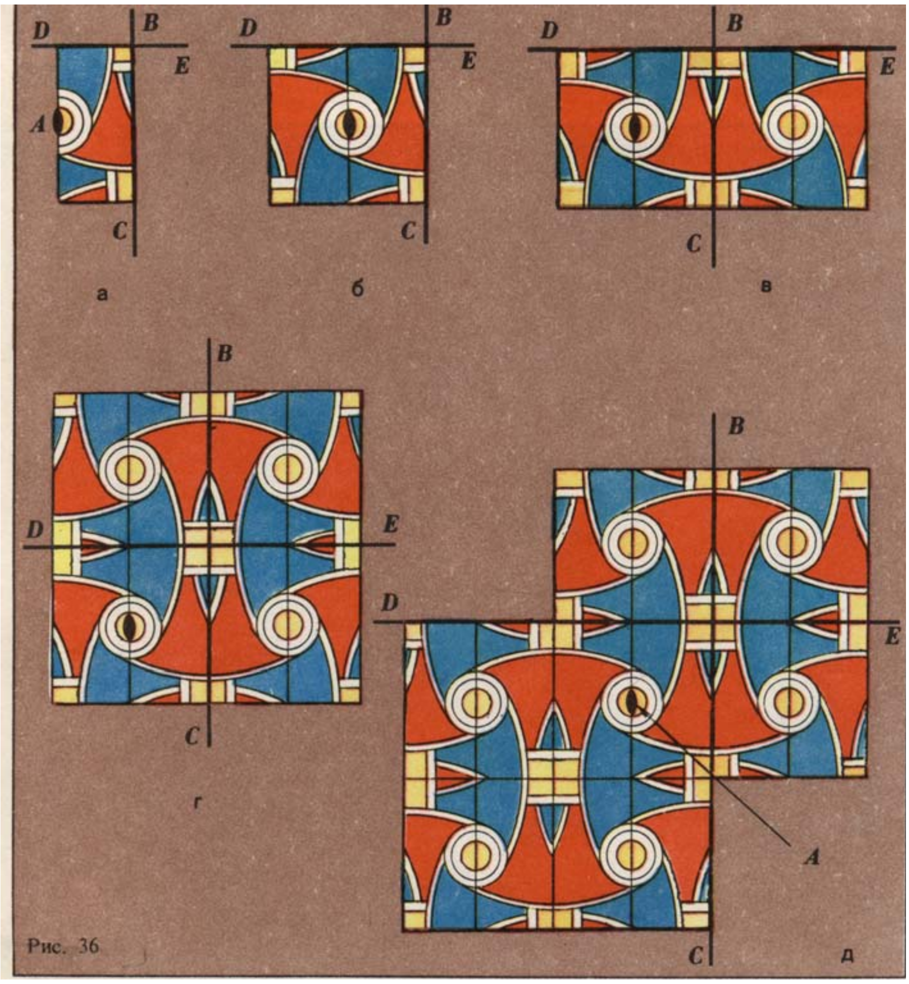


Рис.9 Пример орнамента с поворотами.

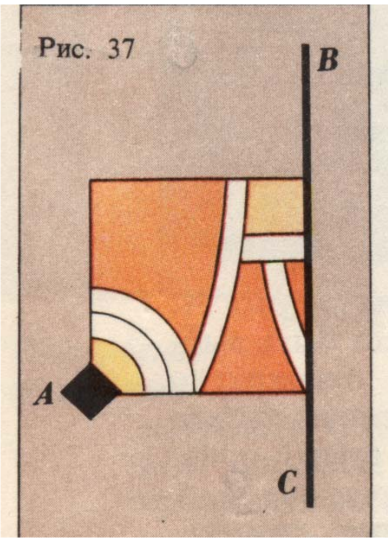


Рис.10 Пример построения орнамента с упрощённой раскраской.

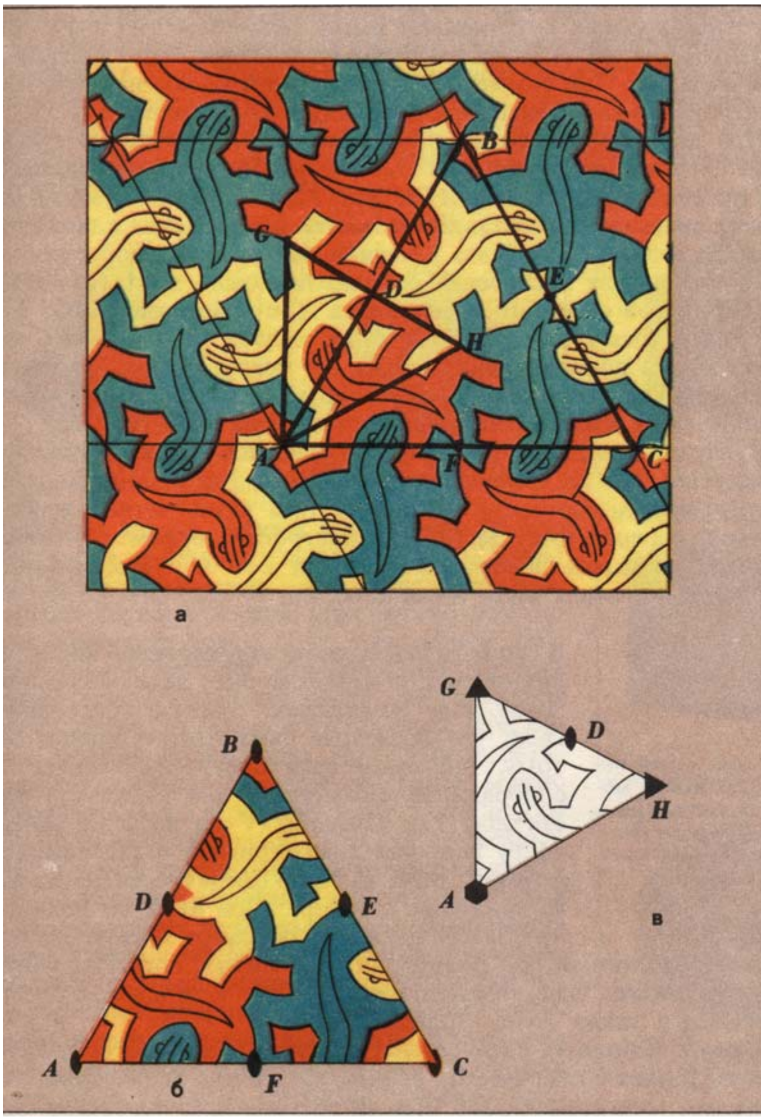


Рис.11 Пример построения орнамента «Ящерицы».

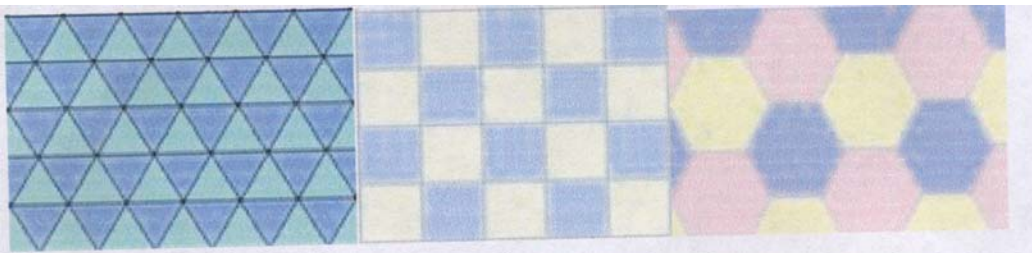


Рис. 12 Пример паркета из правильных треугольников, квадратов, шести-угольников.

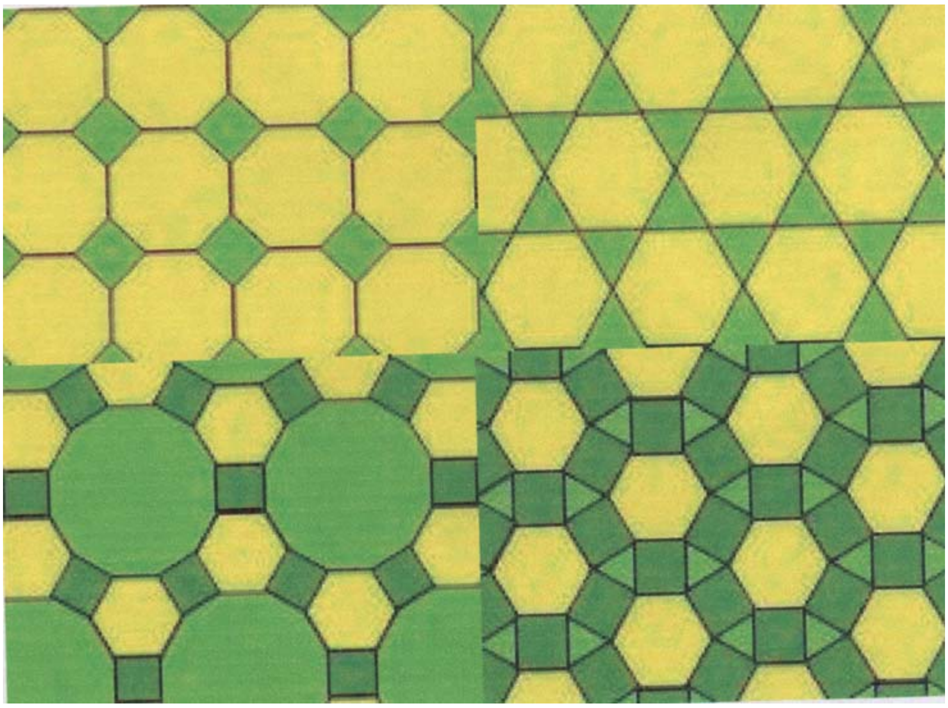


Рис.13. Пример вариантов паркета.

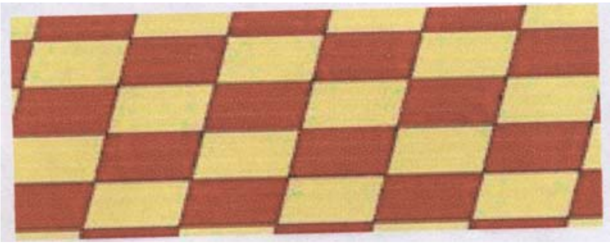


Рис.14 Пример покрытия плоскости параллелограммами.

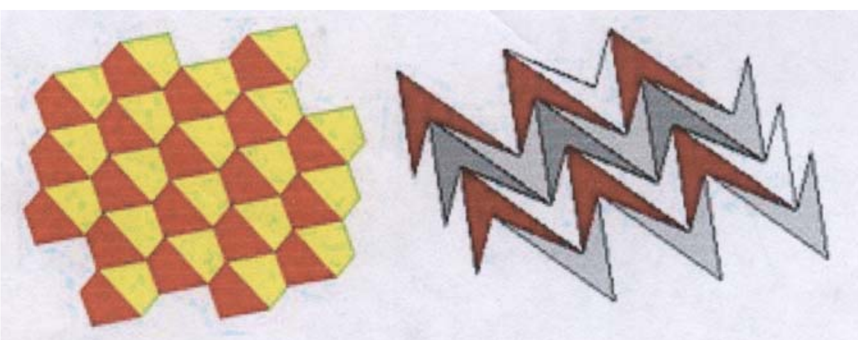


Рис.15 Пример замощения плоскости копиями произвольного четырёхугольника.

Рис.16 Пример составления паркета из двух равных треугольников.

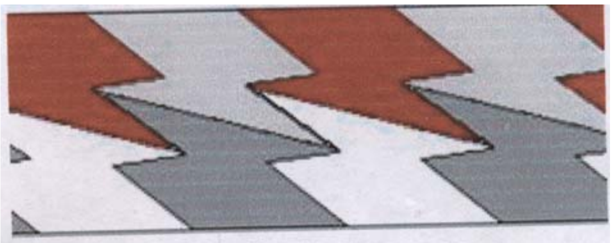


Рис.17 Пример паркета из невыпуклых семиугольников.

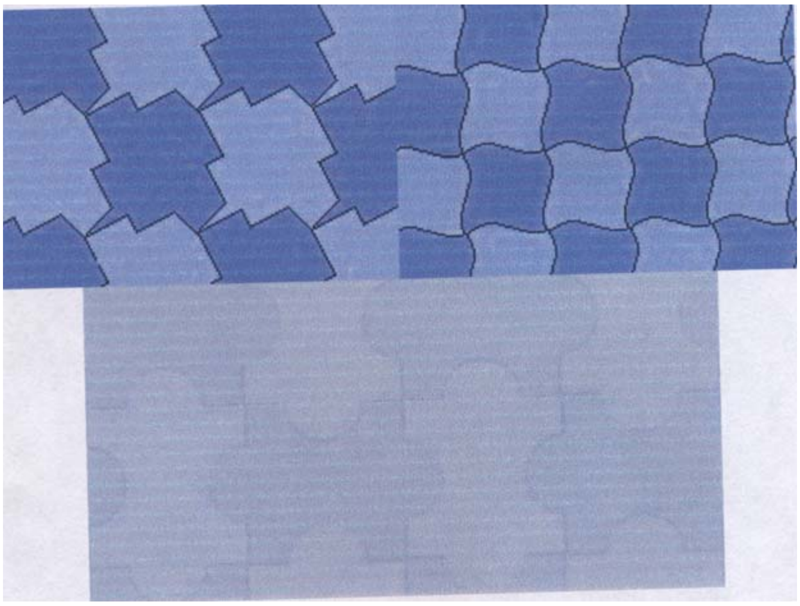


Рис.18 Пример паркета.

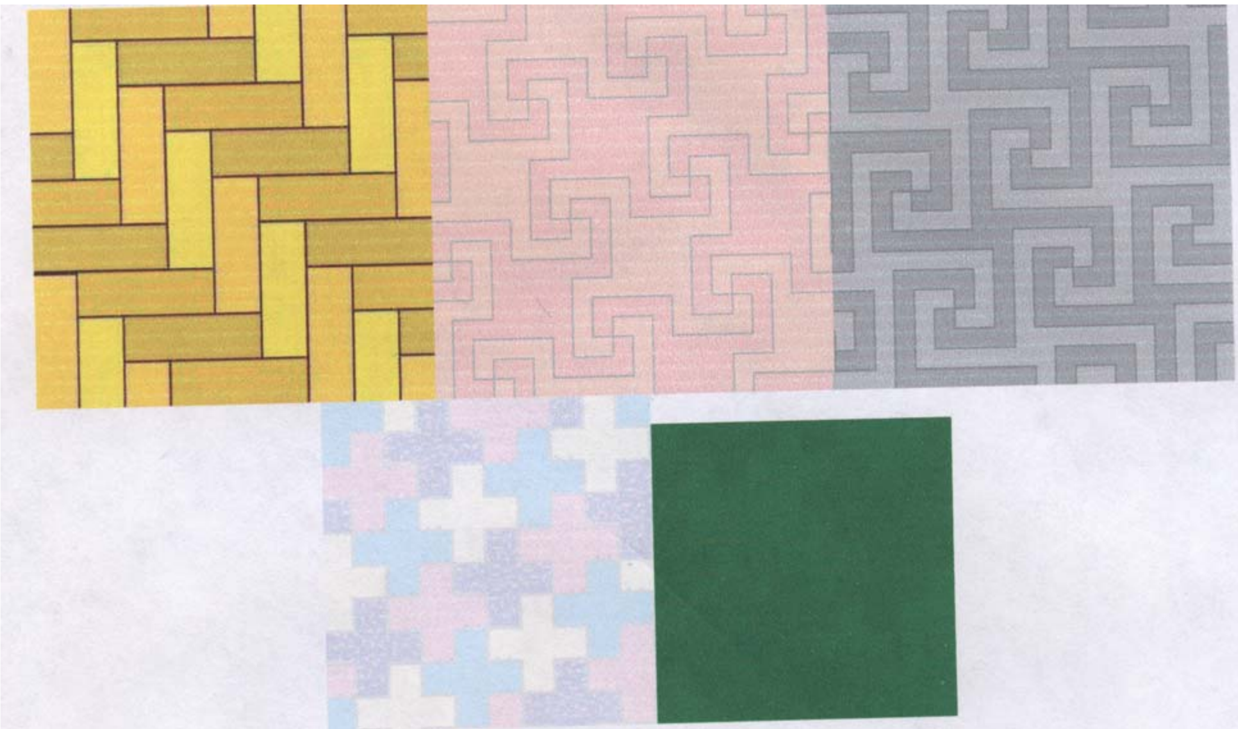


Рис.19 Пример паркета.

Рис.20 Пример паркета.

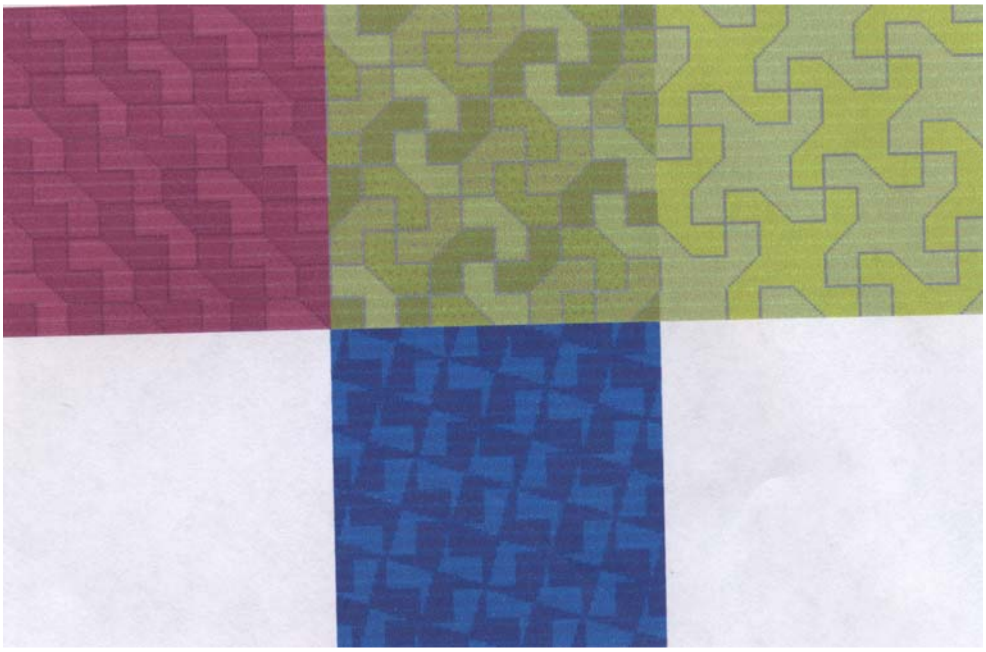


Рис.21 Пример разбиения сетки.

Рис.22 Пример паркета.

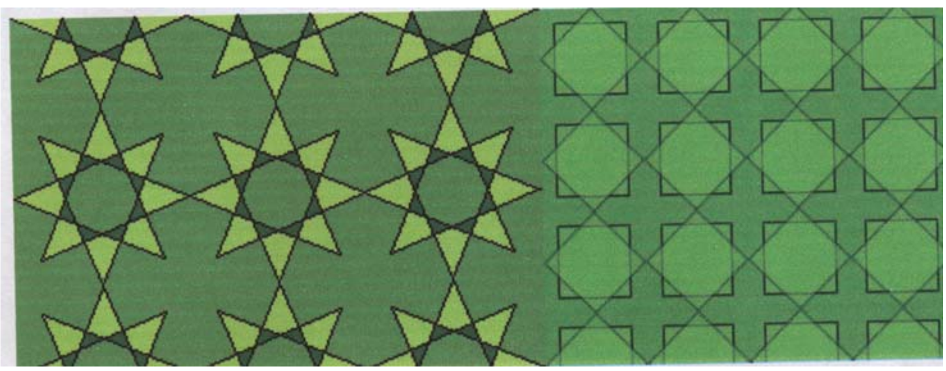


Рис.23 Пример паркета.

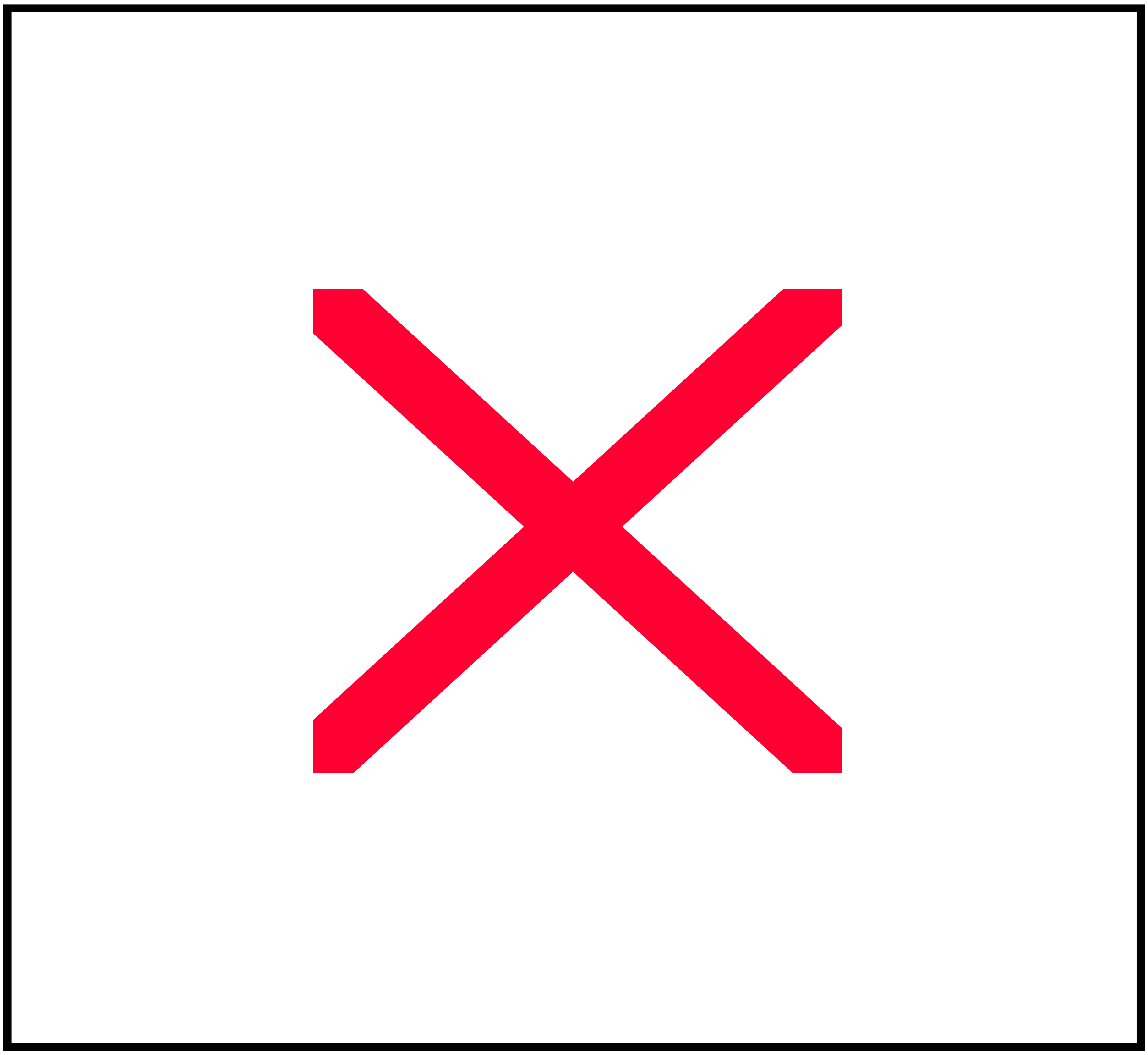


Рис.24 Пример орнамента афрасиабских панелей.

Рис.25 Пример «Свастика» - символ солнца.

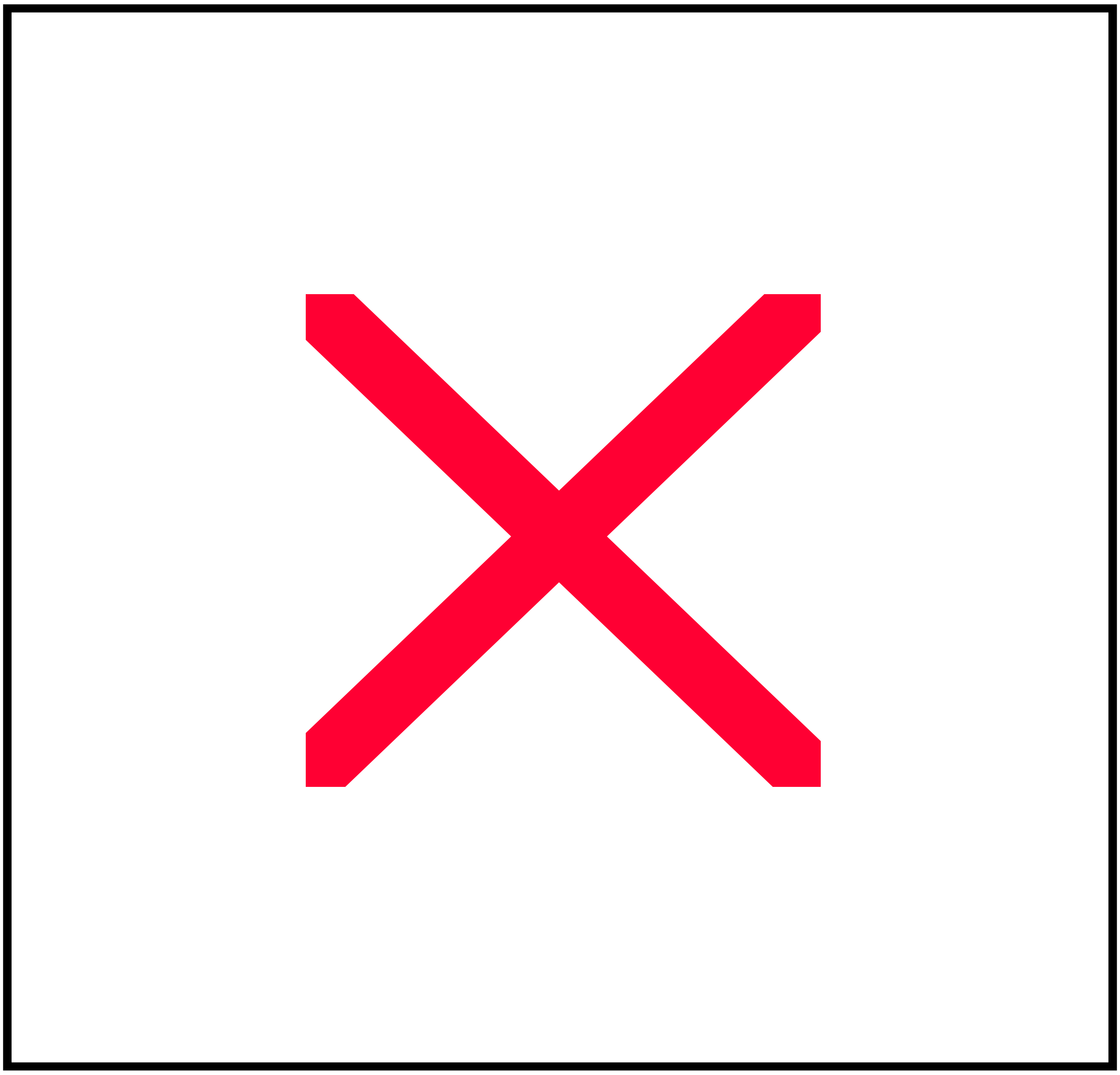


Рис.26 Пример четырёхчастного квадратного «плетёного» знака на миланских рыцарских доспехах XVI в.

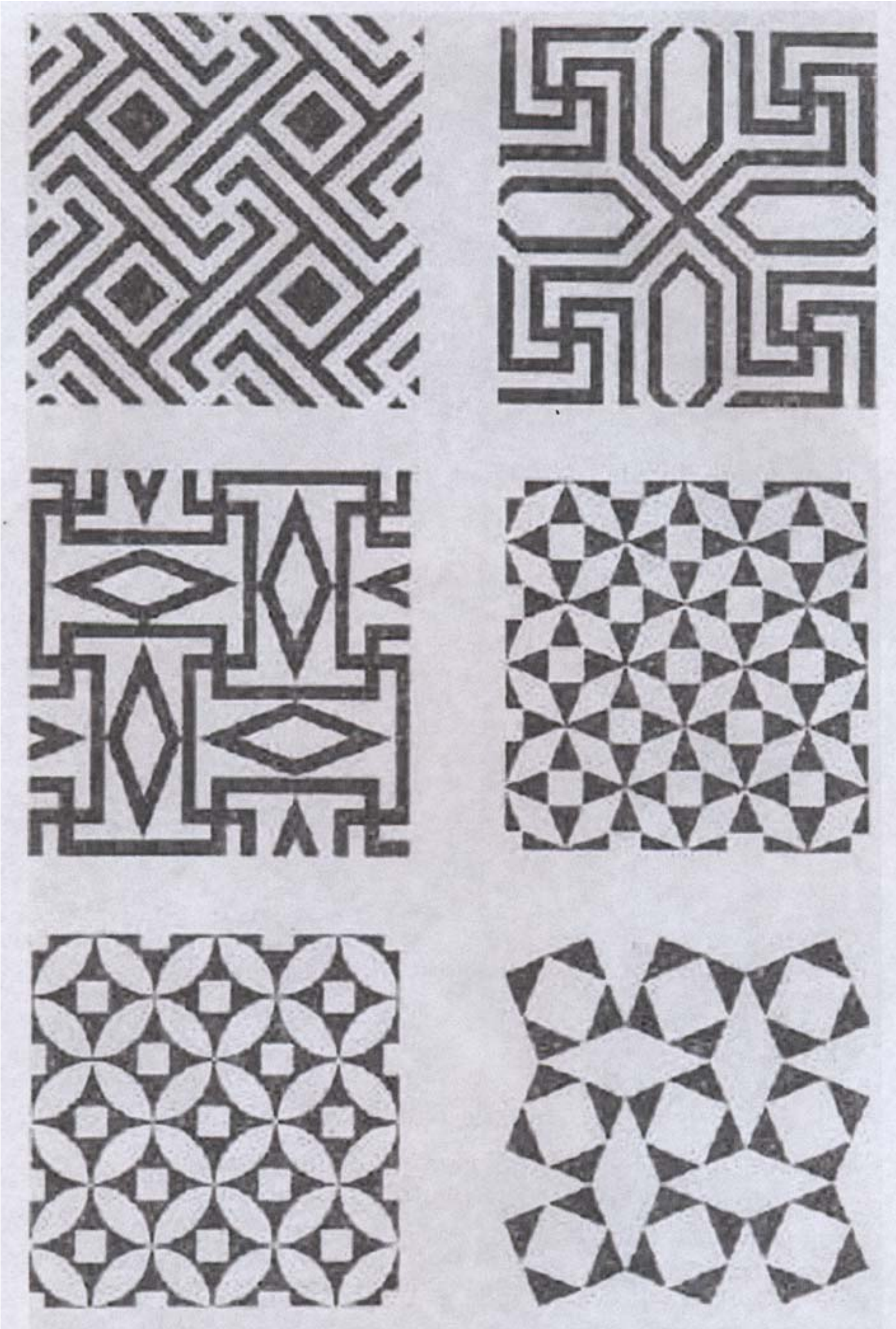


Рис.27 Пример византийской мозаики.

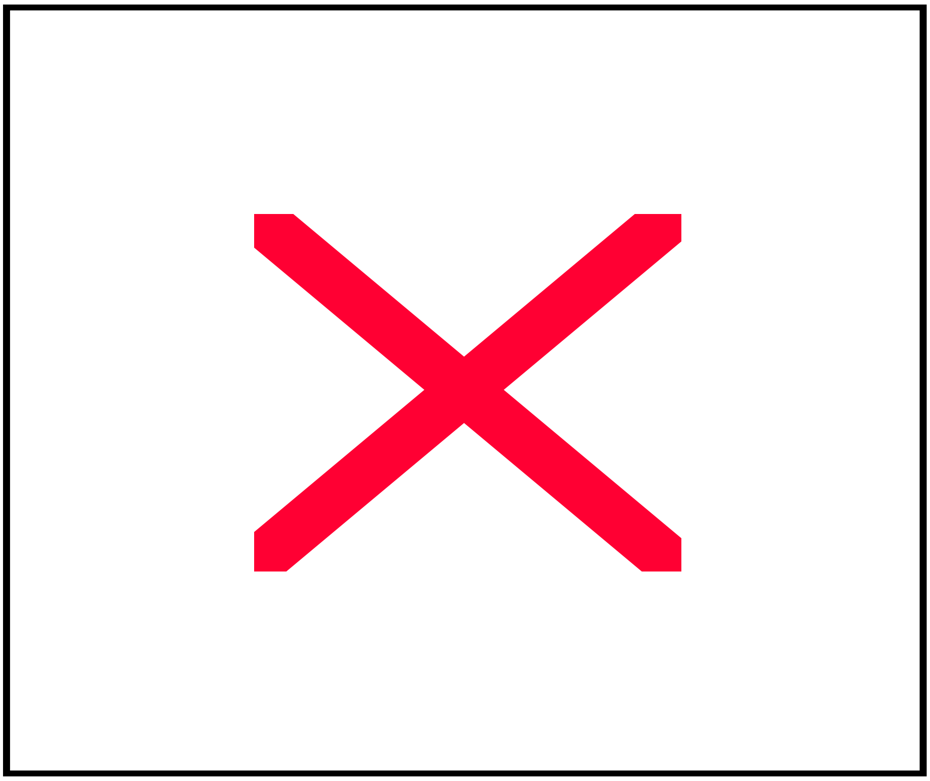


Рис.28 Пример орнаментальной техники в мусульманском искусстве.

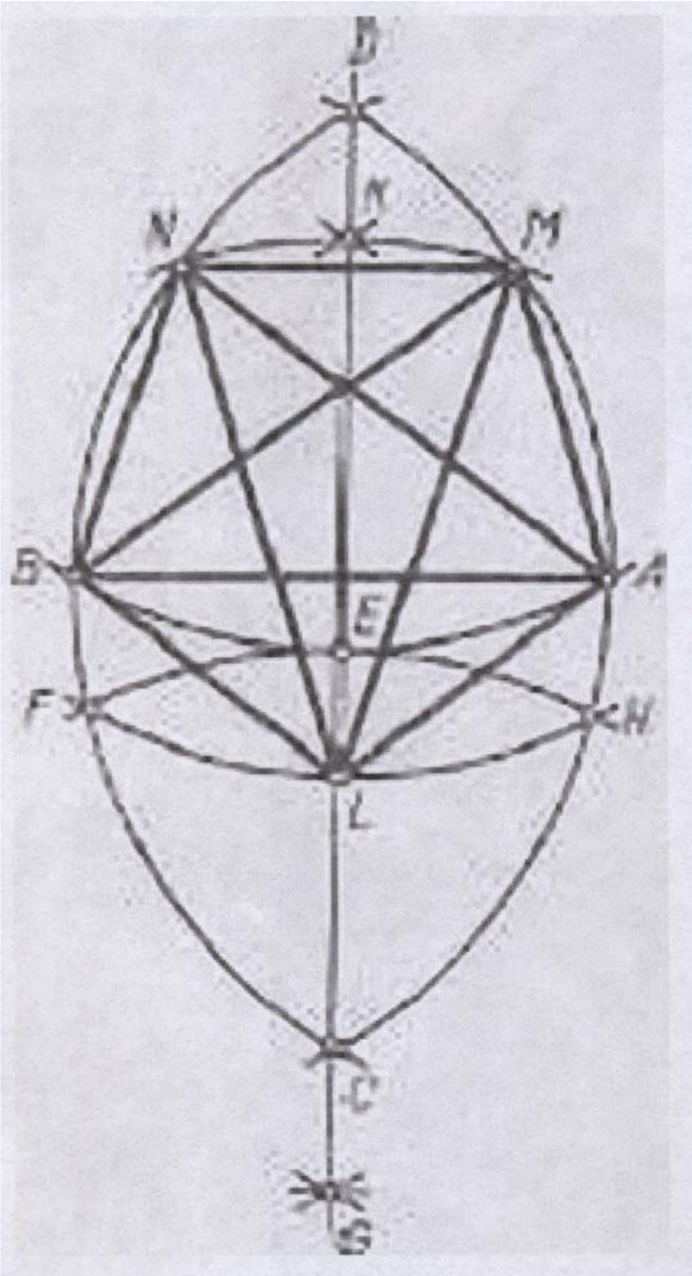


Рис.29 Пример построения пятиугольника постоянным раствором циркуля.

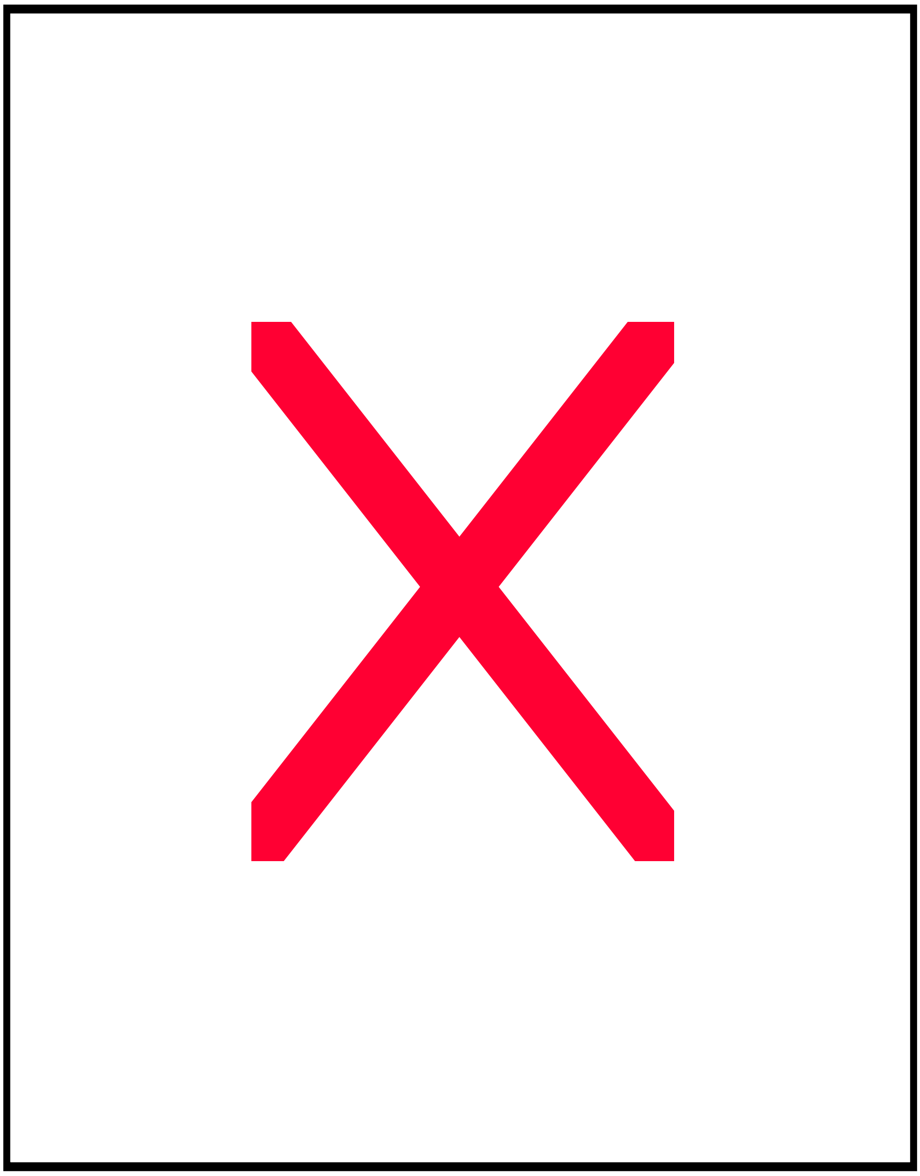


Рис.30 Пример орнаментов с симметрией 5-го порядка.

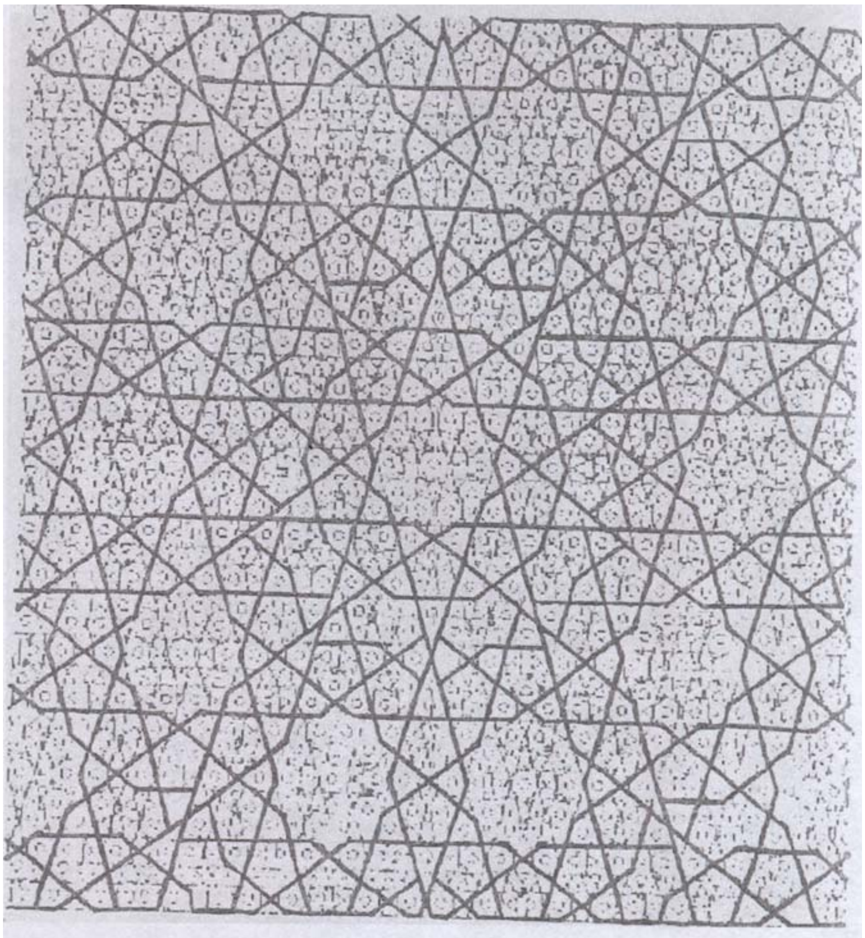


Рис.31 Пример пентагального покрытия.

Рис.32 Пример использования двух плиток для создания периодического орнамента в рисунке Мориса Эшера.

Заключение.

Моя научная работа помогла мне раскрыться, помогла узнать то, о чем я раньше даже и не подозревала. Казалось, что придумать орнамент невероятно сложно. Конечно, без таланта здесь никак не обойтись. Но, и некоторые геометрические знания, и умения, которые я приобрела и отразила в своей работе, помогли мне овладеть ими. Теперь я думаю, что каждый школьник сможет нарисовать свой неповторимый орнамент. Также, в своей работе я изложила истории и тайны древнейших орнаментов, их оригинальность и уникальность в построении. Полученные знания я отразила в решениях геометрических задач, которые, по-моему, мнению можно включить в школьную программу и рассматривать на уроках геометрии и алгебре. Я уже проводила небольшие эксперименты в десятых классах и добилась успеха, а самое главное благодарности одноклассников. При изучении данной темы я обнаружила интересные высказывания знаменитых людей: ученых, поэтов, художников; и теперь они исполняют роль девиза в моей повседневной жизни.

Искусство орнамента содержит в неявном виде
наиболее древнюю часть известной нам высшей
математики.

.Г. Вейль.

Математика… выявляет порядок, симметрию
и определенность, а это – важнейшие
виды прекрасного.

Аристотель.

Математик, который не является отчасти
поэтом, никогда не достигнет
совершенства в математике.

К. Вейерштрасс.

Природа формулирует свои законы
языком математики. Г. Галилей.

Вдохновение нужно в геометрии, как и в поэзии.

А. С. Пушкин.

Моя работа, я думаю, поможет мне в будущем, при поступлении в архитектурный институт, так как я в дальнейшем хочу связать свою жизнь с дизайном и интерьера.

Используемая литература.

1. *Бакланов Н.Б.* Герих: Геометрический орнамент Средней Азии и методы его построения. М., 1947.
2. *Булатов М.С.* Искусные геометрические приёмы в зодчестве Самарканда конца XIV – начала XV в. Ташкент, 1959.
3. *Гоганов Г.И.* Геометрический орнамент Средней Азии // Архитектура. М., 1959.
4. *Колмогоров А.Н.* Паркеты из правильных многоугольников // Квант, 1979. №3
5. *Тарасов Л.В.* Этот удивительный симметричный мир. М., 1982.
6. *Фёдоров Е.С.* Симметрия на плоскости (17 видов орнаментов). СПб., 1891.
7. *Шубников А.В., Копцик В.А.* Симметрия в науке и искусстве. М., 1972.

МУ Управление образования Администрации г. Прокопьевска
Муниципальное образовательное учреждение
« Средняя общеобразовательная школа № 51»

Рецензия
на работу « Конструируя красоту орнамента»

Автор: Колодиева Елена
Учащаяся 10 Б класса
Научный руководитель:
Вершинина М. В.
Учитель математики

Прокопьевск 2006

Объем работы составляет 45 листов, содержит 32 рисунка и решение 4 задач. Данная работа посвящена изучению орнаментального искусства.

Автор, восхищаясь красотой орнаментов, воплощенных в предметах декоративно-прикладного искусства, изучил роль геометрии в создании этих произведений. Между тем сочетание таланта мастера и его геометрических умений занимают важное место в искусстве орнаментов.

Интерес к данной проблеме о красоте орнамента обусловлен желанием автора, раскрыть тайны и секреты создания, выяснить предназначение орнамента на различных предметах и архитектурных сооружениях, изучить конструктивные особенности предмета и природную красоту материала.

В данной работе предлагается подробные характеристики, определения и разновидности орнаментов, бордюров и геометрических паркетов. К каждому виду прилагается рисунок.

Символические «тексты» Афрасиаба изучены и широко представлены автором в данной работе. Византийская мозаика освящена в доступной и интересной форме.

Автор самостоятельно, с интересом и творческой инициативой подошел к изучению данной темы. При формировании отбор материала происходил на основе философских, исторических и культурологологических сведений. Они определили заказ на математическое наполнение. Однако математика служит в этой работе не второстепенным, а самым главным связующим компонентом содержания.

Естественно-культурологическая составляющая показывает взаимосвязь природных форм с произведениями искусства. Важнейшая цель этой работы - показать красоту как главную категорию эстетики и математики.

Математическая составляющая работы представлена системой понятий и задач различного характера. Многие задачи носят прикладной характер и помогают лучше раскрыть тему.

Полученные знания отразил в решении задач, рассмотренных в приложении к данной работе. Работа оформлена правильно, логично, материал изложен последовательно, четко обозначены цели, задачи, предмет изучения, основная часть, применение знаний и выводы.

Изложенное позволяет считать, что рецензированная работа очень интересная и важная, позволит автору применить полученные знания и умения при получении дальнейшего образования, связанного с дизайном одежды и интерьера.

Рецензент: Вершинина М.В.

Тезисы работы на IX научно - практическую конференцию школьников «Старт в науку» по теме « Конструируя красоту орнамента» (секция «математика») ученицы 10Б класса МОУ «Средняя общеобразовательная школа № 51 » Колодиевой Елены.

Актуальность изучения данной проблемы гуманизация математики и ее прикладная направленность.

Рассмотрены все существующие 7 типов симметрии бордюров с рисунками, 17 типов симметрии плоских орнаментов с подробным разбором принципа построения орнамента «Летящие птицы» и «Ящерицы».

Представлены геометрические паркеты из правильных одинаковых многоугольников, из разных правильных многоугольников, из неправильных многоугольников. Даны 4 способа построения паркета.

Выявлены и прочтены символические «тексты» Афрасиаба – исключительно важная задача постижения древней культуры.

Византийская мозаика представляет собой одно из древнейших достижений по созданию симметричных периодических замощений плоскости. Творчество Мориса Эшера вызывает исключительный интерес, в которой он обнаружил переход из одной симметрии в другую.

Данная работа объединяет несколько содержательных линий: историко-философскую, естественно-культурологическую и математическую. Три обозначенные линии тесно переплетены, дополняя друг друга, помогают увидеть мир в единстве, красоте, многообразии. Вышеупомянутая триада раскрывает эффективность применения математических методов в различных областях культуры, науки, искусства.

Математика – это не только стройная система законов, теорем и задач, но и уникальное средство познания красоты. А красота многогранна и многолика. Она выражает высшую целесообразность устройства мира, подтверждает универсальность математических закономерностей, которые действуют одинаково эффективно в кристаллах и живых организмах, в атоме и во Вселенной, в произведениях искусства и научных открытиях. Поистине:

Во всем царит гармонии закон,
И в мире все суть ритм, аккорд и тон.

Дж. Драйден

Конечно, все законы красоты невозможно вместить в несколько формул. Но, изучая математику, мы открываем все новые и новые слагаемые прекрасного, приближаясь к пониманию, а в дальнейшем и к созданию красоты и гармонии.