Муниципальное общеобразовательное учреждение
“Средняя общеобразовательная школа №10”
Арсеньевского городского округа.

Подобие в жизни.

Выполнила:
ученица 9 социально –
экономического класса
Кондратьева Анна Андреевна.
Руководитель:
учитель математики
Великороднова Светлана
Викторовна.

2007г.

В огромном саду геометрии каждый найдёт букет себе по вкусу

Давид Гильберт

Самоподобие в природе

Оглавление

Введение. 4
Глава I Из истории подобия. 5
Глава II Автоподобные фигуры. 7
Глава III Геометрические преобразования и паркеты. 14
Практическая часть. 16
Заключение. 17
Список литературы. 18
Приложение. 19
Приложение 1. Пирамиды. 20
Приложение 2. Способ палетки. 21
Приложение 3. Пропорциональный циркуль. 22
Приложение 4. Портрет музыканта. 23
Приложение 5. Флорентийский собор. 24
Приложение 6. Многогранник. 25
Приложение 7. Подсолнух и галактика Солнечной системы. 26
Приложение 8. Кривая Пеано. 27
Приложение 9. Фракталы. 28
Приложение 10. Ломаные, напоминающие дракона. 29
Приложение 11. Элементы паркета. 30
Приложение 12. Папоротник и кактус. 31
Приложение 13. Эстетический зал второго этажа школы №10. 32
Приложение 14. Сопка обзорная. 33
Приложение 15. Картины. 34

Введение.

Геометрия – одна из наиболее древних математических наук. Название науки “геометрия” древнегреческого происхождения. Оно составлено из двух древнегреческих слов geo – “Земля” и metreo – “измеряю”.

Возникновение геометрических знаний связано с практической деятельностью людей. Это отразилось и в названиях многих геометрических фигур. Например, термин “линия” возник от латинского linum – “лён, льняная нить ”.

При всей практической значимости задач о раскрое материала, транспортных задач и т. д. порождаемые ими понятия многомерной геометрии являются лишь «пространственноподобными» они похожи на то, что мы видим в реальном пространстве, но представляют собой следующую, более высокую ступень абстракции от пространственных форм реального трёхмерного мира.

Характерной чертой современного развития математики является то, что геометрия всё больше приобретает роль метода мышления, метода осмысливания и организации математической информации буквально во всех областях математики и её приложений.

Цель данной работы: узнать где в жизни встречается и применяется подобие.

Основная задача, которую я ставила перед собой – это познакомиться с историей подобия; увидеть подобие не через определение и теоремы, а через удивительный мир природы; самой в природе отыскать подобие, вычислить коэффициент подобия и на конкретных примерах показать применение. Эта тема в литературе изучена достаточно хорошо.

Из книги Глейзера Г. И. “История математики в школе” я узнала, что учение о подобии фигур было создано в V – VI вв. до н. э., и проследила всю историю до наших дней. Из энциклопедии для детей “Математика” я узнала об автоподобных, самоподобных фигурах и фракталах, в “Математике приложение “Первое сентября” нашла применение подобия, а из книги Уоллэйс Роберта Мир Леонардо узнала, где подобие встречается в искусстве.

В своей работе я сама нашла в природе, где встречаются самоподобные фигуры, и применяется подобие в жизни.

Глава I: Из истории подобия.

Идея отношения и пропорции зародилась в глубокой древности. Об этом свидетельствуют древнеегипетские храмы, детали гробницы Менеса и знаменитых пирамид в Гизе (III тысячелетие до н. э.) (приложение 1), вавилонские зиккураты (ступенчатые культовые башни), персидские дворцы и другие памятники древности.

Одинаковые по форме, но разные по величине фигуры встречаются в вавилонских и египетских памятниках. В сохранившейся погребальной камере отца фараона Рамсеса II имеется стена, покрытая сетью квадратиков, с помощью которых на стену перенесены в увеличенном виде рисунки меньших размеров.

Учение о подобии фигур на основе теории отношений и пропорции было создано в Древней Греции в V – VI вв. до н. э. Оно изложено в V книге “Начал” Евклида, начинающейся следующим определением: “Подобные прямолинейные фигуры суть те, которые имеют соответственно равные углы и пропорциональные стороны”.

Подобие фигур издавна применяется на практике при составлении географических карт, планов и чертежей, при землемерных работах на местности (так называемой мензульной съёмке) и т. п.

Для практики всегда имели большое значение сравнительно простые и общедоступные методы построения подобных фигур. Одним из них является “Способ палетки” (приложение2), который обычно применяется при копировании рисунков, картин и портретов. Желая сделать копию рисунка, мы накрываем его палеткой, т.е. прозрачной пластинкой или бумагой с нанесённой на неё сеткой квадратов. На месте, предназначенном для копии, чертится временная квадратная сетка, которая по окончанию работы стирается. Отношение стороны квадрата временной сетки к стороне квадрата палеточной сетки будет коэффициентом подобия.

Этот метод копирования при помощи квадратной сетки был известен древним египтянам. Палетку применяют также для вычисления площадей на планах и картах.

Для уменьшения или увеличения чертежа в произвольном отношении служит также пропорциональный циркуль. Это простой инструмент (приложение 3), в котором шарнир 2 устанавливается так, чтобы черта, нанесённая на нём, совпала с определённым делением К шкалы 1 на одной из ножек. Тогда отношение расстояний |ab|:|AB| тоже будет равно К. Этот циркуль, который особенно широко используется в картографии, был изобретён великим итальянским учёным Галилео Галилеем (1564 - 1642). Опубликованное Галилеем описание пропорционального циркуля дало возможность учёным и техникам использовать новый инструмент для быстрого производства различных построений и расчётов. Галилей утверждал, что настоящая философия “написана в величайшей книге, которая постоянно

открыта нашим глазам”. Это книга – сама Вселенная, природа, которую нужно научиться читать. “Написана же она на языке математики… ”.

Искусство изображать предметы на плоскости с древних времён привлекало к себе внимание человека. Попытки таких изображений появились значительно раньше, чем возникла письменность. Ещё в глубокой древности люди рисовали на скалах, стенах, сосудах и прочих предметах быта различные орнаменты, растения, животных. При этом человек стремился к тому, чтобы изображениё правильно отражало естественную форму предмета. Основное требование к изображению сводилось к соответствию точек натурального объекта с точками его изображения на плоскости или какой- либо другой поверхности.

Длительная практика показала людям. Каким правилом надо следовать, чтобы правильно выразить на плоскости желаемый предмет. Так возникли зачатки учения о соответствии и преобразовании. Раньше других свойств при изображении различных предметов на плоскости были подмечены и изучены законы перспективы. Многие из этих законов были известны в Древней Греции. Как утверждает римский архитектор Витрувий (1 в. До н. э.), Демокрит (ок. 460-370 гг. до н. э.) и Анаксагор (ок. 500-428 гг. до н. э.) соблюдали некоторые правила перспективы при подготовки декорации для постановки трагедии Эсхила (525-456 гг. до н. э.) “Прикованный Прометей” и др.

Особенное внимание исследованию и применению в живописи и зодчестве законов перспективы уделяли художники и архитекторы эпохи Ренессанса. Первая известная нам работа о перспективе талантливого архитектора и учёного Альберти (1402-1472 гг.) была напечатана в 1511 г., а написана около 1446г.

Превосходный для своего времени трактата о перспективе написал гениальный художник Леонардо да Винчи (1452-1519 гг.) (Приложение 4, 5, 6). Художник Рафаэль, Микель Анджело, Тициан, Веронезе и др. в своих бессмертных творениях строго следовали законам перспективы.

Подобие есть некоторое взаимно однозначное точечное преобразование плоскости. Если между двумя плоскостями установлено подобное соответствие, то любой угол между прямыми в одной плоскости равен соответственному углу в другой плоскости, а отношение двух соответственных отрезков равно коэффициенту подобия.

Символ, обозначающий подобие фигур, есть не что иное, как повёрнутая латинская буква S – первая буква в слове similes, что в переводе означает подобие.

Глава II: Автоподобные фигуры.

Автоподобные фигуры, т. е. фигуры, части которых подобны целому, всё больше и больше привлекают к себе внимание не только математиков, но и учёных самых различных областей знания.

Пропорциональность проявляется в подобном строении дерева и его ветвей, в формах кристаллов и снежинок, в сохранении одной клеткой живого организма всей информации о целом и т. д.

Автоподобие широко использовал в своих картинах известный голландский художник М. Эшер (1898 - 1972). Репродукция одной из его картин (рис. 1а) помещена на обложке учебника И. М. Смирновой, В. А. Смирнова «Геометрия, 7 - 9».

Примером автоподобной фигуры является *золотая,* иначе *логарифмическая спираль.* В форме золотой спирали закручиваются раковины многих моллюсков, улиток (рис. 1б), рога архаров. Один из наиболее распространённых пауков, эпейра, сплетает свою паутину по золотой спирали.

Рис. 1а.

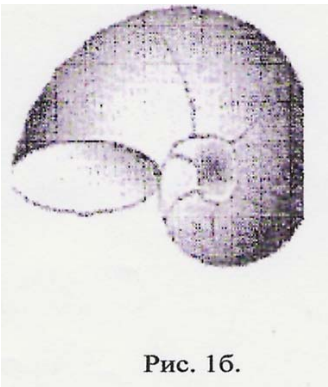


Рис. 1б.

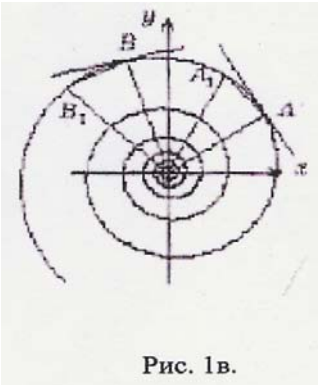


Рис. 1в.

Природа повторяет свои находки как в малом, так и в большом, например, семечки в подсолнухе располагаются по золотой спирали точно также, как закручиваются многие галактики, в частности, галактика Солнечной системы (приложение7).

В полярных координатах золотая спираль задаётся уравнением, где a – некоторое фиксированное положительное число (рис. 1в).

Геометрическим свойством золотой спирали является то, что каждый следующий её виток подобен предыдущему. Действительно, если угол увеличивается на 2n, т. е. точка делает один оборот против часовой стрелки, то радиус увеличивается в a^{2n} раз. Последнее означает, что следующий виток подобен предыдущему и коэффициент подобия равен a^{2n}. Используя это свойство, построив один виток золотой спирали, все остальные витки можно получить подобием.

Другим геометрическим свойством золотой спирали является то, что в любой её точке угол между касательной к ней и радиусом – вектором сохраняет постоянное значение.

Для доказательства напомним, что *касательной к кривой в точке А* называется предельное положение секущей AA_1при A_1, стремящейся к *А*.

Пусть точки В, B_1, получены поворотом лучей OA_1и ОА на угол φ (см. рис. 1в). Тогда треугольники OAA_1и OBB_1подобны, и поэтому углы OAA_1и OBB_1– равны. При A_1, стремящейся к А, эти углы дадут углы между касательными и радиусами - векторам и в точках А и В соответственно. Следовательно, угол между касательной и радиусом – вектором не зависит от положения точек на золотой спирали, т. е. сохраняет постоянное значение.

Именно это свойство золотой спирали используется в различных технических устройствах. Например, при изготовлении вращающихся ножей, что позволяет сохранять при вращении постоянный угол резания. В гидротехнике по логарифмической спирали изгибают трубу, подводящую поток воды к лопастям турбины, благодаря чему напор воды используется с наибольшей производительностью.

Ночные бабочки, ориентируясь по параллельным лунным лучам, инстинктивно сохраняют постоянный угол между направлением полёта и лучом света. Однако если вместо луны они ориентируются на близко расположенный источник света, например, на пламя свечи, то инстинкт их подводит. Сохраняя постоянный угол между направлением полёта и источником света, они двигаются по скручивающейся золотой спирали и попадают в пламя свечи.

Многие знакомы с приключениями девочки Алисы – героини волшебных сказок английского математика и писателя Чарльза Латуиджа Доджсона (1832 - 1898), сочинявшего под литературным псевдонимом Льюис Кэрролл. В повести “Алиса в стране чудес” с девочкой происходит каскад превращений. Она то увеличивается до невероятных размеров, то уменьшается до величины кролика или мышки. Любопытно, что в одних случаях окружающие её предметы не претерпевают никаких изменений, в других – становятся миниатюрными.

Идею самоподобия малого в большом высказывали не только сказочники. Известный немецкий философ и математик Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 - 1716) рискнул предположить, что внутри капли воды могут умещаться целые вселенные со своими планетами, на которых предаются важным размышлениям философы, такие же, как и на нашей Земле. Валерий Брюсов в стихотворении “Мир электрона” (1922г.) облёк эту мысли в поэтическую форму:

Быть может, эти электроны – Миры, где пять материков,
Искусства, знанья, войны, троны И память сорока веков!
Ещё, быть может, каждый атом – Вселенная, где сто планет;
Там всё, что здесь, в объёме сжатом, Но также то, чего здесь нет.

Самоподобие в природе.
Ветка папоротника.

Самоподобной геометрической фигурой называют фигуру, которую можно разрезать на конечное число одинаковых фигур, подобных ей самой. Самоподобными, например, являются правильный треугольник и квадрат (рис. 2а). Однако и самоподобные фигуры весьма причудливых очертаний. На рис. 2б показаны первые несколько стадий построения «веточки».

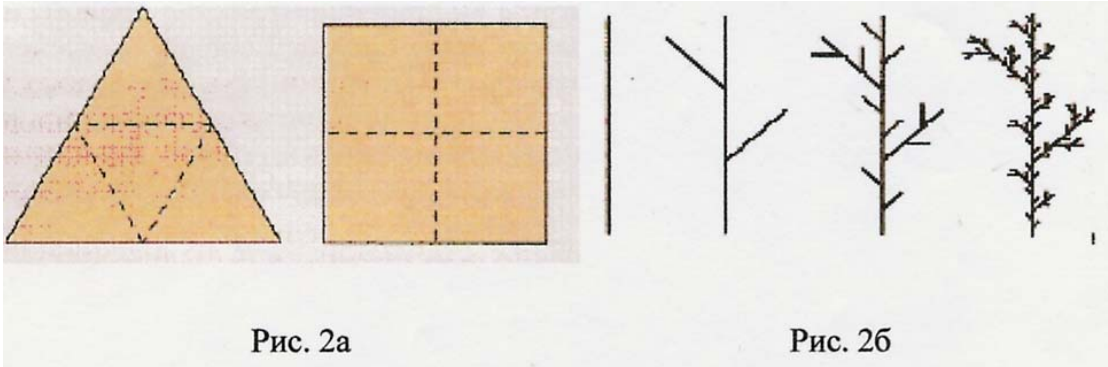


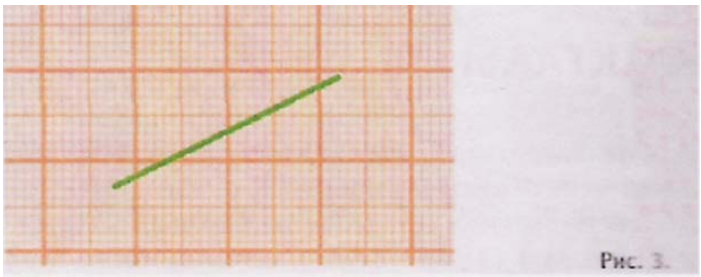
Рис. 2а Рис. 2б

Это простейшая самоподобная фигура, имеющая неограниченное число элементов. Она строится следующим образом.

Исходный отрезок делят на три равные части, и из точек деления под углом 45 проводят отрезки, составляющие 1/3 длины исходного отрезка. Затем ту же процедуру повторяют по отношению к вновь построенным отрезкам и т. д.

Аналогичное свойство самоподобия обнаруживают многие объекты в природе, стоит лишь повнимательнее присмотреться к ним: к линиям трещин в земной коре, ветвления деревьев, очертаниям гор, облаков и коралловых рифов. Рассмотрев горный хребет с разного расстояния – из космоса, с борта самолёта, а затем непосредственно с горной вершины, каждый раз мы будем обнаруживать всё новые и новые подробности, искривления и изломы – раньше они представлялись нам прямыми или плоскими деталями рельефа, но видим мы, тем не менее, всё те же горы. Рельеф гор как бы не зависит от масштаба – он самоподобен.

Объекты, обладающие таким свойством, современный американский математик Бенуа Мандельброт предложил назвать фракталами (от лат. frangere – «ломать», «разбивать»). В книге «Фрактальная геометрия природы», Мандельброт относит к фракталам объекты, форма которых может быть описана как зернистая, ветвистая, морщинистая, запутанная, похожая на морские водоросли. В последние десятилетия возникло и развивается новое направление в геометрии – *фрактальная геометрия.* Фрактал (fractus) в переводе с латинского означает *изломанный, дробный,* и основным его свойством является *автоподобность.* Внутренние свойства фракталов удобно описывать числовой характеристикой, получившей название фрактальной размерности. Проведём эксперимент. Возьмём лист чистой миллиметровой бумаги и начертим на нём произвольный прямолинейный отрезок (рис. 3).



Подсчитаем количество клеток с длинной стороны 1 см и количество клеточек с длиной стороны 1мм, через которые проходит этот отрезок. Во сколько раз одно число больше другого? Если эксперимент проводить аккуратно, то покрывающих отрезок миллиметровых клеток окажется в десять раз больше, чем сантиметровых. Результат представляется вполне обнаружим, исследовав периметры треугольника, параллелограмма или круга. Другими словами, число N квадратиков, покрывающих отрезок, пропорционально величине 1/d, где d – размер стороны квадратика. Казалось бы, установленное ими свойство должно быть присуще любой линии на плоскости. Поразительно, но это не верно. Один из первых примеров таких фигур придуман в начале XX века немецким математиком Хельгой фон Кох (1870 - 1924) и называется *звезда Кох.* Для её построения берут равносторонний треугольник и последовательно добавляют к нему новые, подобные ему, треугольники. На первом шаге стороны правильного треугольника (рис. 4) разбиваются на три равные части и их середины заменяются на правильные треугольники, подобные исходному. В результате получается правильный звёздчатый шестиугольник (рис. 5). Стороны этого шестиугольника снова разбиваются на три равные части, и их середины заменяются на правильные треугольники (рис. 6).

Рис. 4

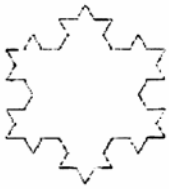


Рис. 6

Рис. 5

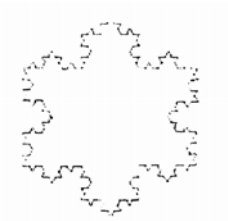


Рис. 7

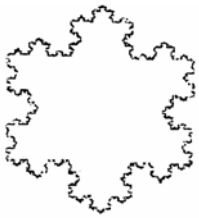


Рис. 8

Повторяя этот процесс, получают всё более сложные многоугольники (рис. 7, 8), всё более приближающиеся к предельному положению – звезде Кох. Приведённые рисунки были построены несколько иначе с помощью *графического редактора Paint.*

На рисунках 9, 10 изображены фигуры Кох, построенные из окружностей.

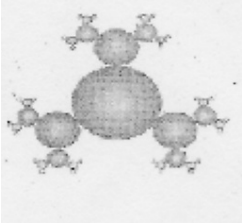


Рис. 9

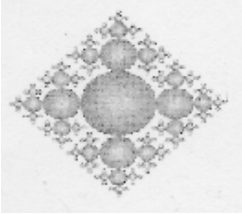


рис. 10

Фигуры Кох можно рассмотреть на уроках геометрии при изучении подобных фигур, длины окружности, площади круга и др.

Ещё один интересный пример кривой, получающейся последовательным приближением подобными многоугольниками, был получен Д. Пеано (1858 - 1932) и называется кривой Пеано. В 1890 г. Джузеппе Пеано построил линию, которую мы сегодня без всякого сомнения, называем фракталом. Этапы построения кривой Пеано – процесс дробления её звеньев (приложение 8).

Безусловно, кривая Пеано – экзотика, причуда, фантазия изобретательного математического ума. На сколько же были удивлены учёные, когда обнаружены реальные объекты, которые, как и кривая Пеано, не укладывались в привычные представления практической геометрии. Одним из первых с ними столкнулся английский естествоиспытатель Л. Ричардсон (1881 - 1953), исследовавший очертания береговых линий. Оказалось, что измеряемая длина побережья L пропорциональна 1/d, где d – длина стороны квадрата масштабной сетки, а показатель характеризует степень изрезанности берега. Например, для побережья Великобритании коэффициент, составляет 1,24; для побережья Австралии – 1,13 и т. д. Изломы и шероховатости линии берега, которые видны на картах крупного масштаба, постепенно исчезают по мере его уменьшения. Если мы измерим длину береговой линии на картах разного масштаба, то увидим, что она тем больше, чем крупнее масштаб. Отметим, что ломаные, участвующие в построении кривой Пеано, на каждом этапе проходят через все квадраты, а сами квадраты уменьшаются, стягиваясь к точкам исходного квадрата. Поэтому кривая Пеано будет проходить через все точки исходного квадрата, т. е. она полностью заполняет весь исходный квадрат. Конечно, она имеет бесконечную длину.

Глубочайшее эмоциональное воздействие на людей оказывают творения, возникшие на самом гребне научно – технического прогресса конца XX века. Человеку, впервые

созерцающему фантастические узоры, приведённые на рис. 11, трудно поверить, что выполнила их не обладающая воображением «бесчувственная» вычислительная машина, следуя не сложному математическому замыслу. Открыл узоры Бенуа Мандельброт. Его творения – прекраснейшие представители богатого мира фракталов.

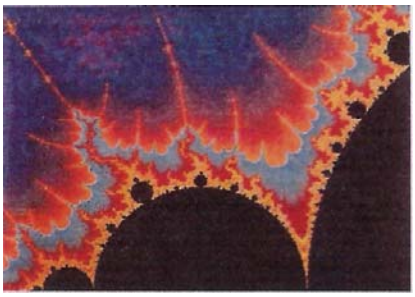


Рис. 11

Как же удалось математикам вычислить красоту? Что за математические зависимости лежат в основе этих шедевров?

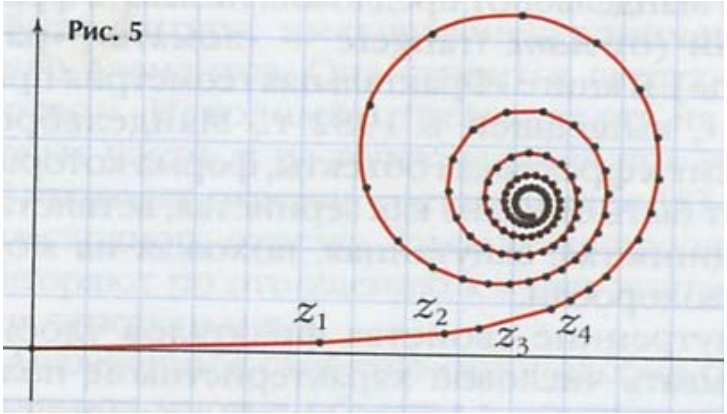
В поисках ответа вспомним о комплексных числах и о комплексной плоскости. Любое комплексное число $z = x + iy$ на данной плоскости изображается точкой, и её можно найти, если задать две координаты x и y – соответственно действительную и мнимую части числа z. Число i (мнимая единица) весьма необычно: его квадрат равен -1. В записи $z = x + iy$ оно отчасти служит для того, чтобы отличать действительную часть числа z от мнимой. Комплексные числа можно складывать и умножать, и в результате также получится комплексное число. При суммировании двух комплексных чисел их компоненты складываются по отдельности, а умножение производиться по правилам умножения многочленов. Например: $(2 + 3i)(4 – 5i) = 8 – 10i + 12i – 15i^2 = 8 + 2i – 15i^2$. Учитывая, что $i^2 = -1$, окончательно получаем $8 +2i – 15i^2 = 23 + 2i$.

Отправим точку в путешествие по комплексной плоскости. Снабдим её следующим предписанием. Если точка находится в каком – то пункте $z = x + iy$ (его координаты x и y), то следующий пункт z' она должна выбирать по правилу

$$z' = z^2 + c,$$

где $c = c_1 + ic_2$ – некоторое фиксированное (не меняющееся во время путешествия точки) комплексное число с действительной частью c_1 и мнимой частью c_2. В соответствии с правилами выполнения операций над комплексными числами это означает, что новые координаты $(x';y')$ точки вычисляются по формулам

$$\begin{cases} x' = x^2 – y^2 + c_1, \\ y' = 2xy + c_2. \end{cases}$$



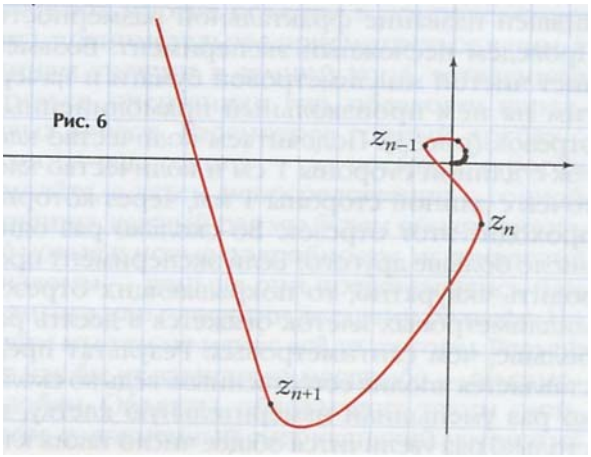


Рис.11а рис.11б

На рис. 11а и 11б показаны маршруты путешествия точки с местом старта в начале координат, соответствующие разным значениям с: на рис. 11-а с = 0,27 + 0,01i, а на рис. 11б с = 0,29 + 0,01i. В первом случае точка не желает уходить слишком далеко от «домашнего очага». Во втором – бежит «куда глаза глядят»: удаляется всё дальше и дальше. Оказывается, существует область значений параметра с, при которых точки – путешественницы, выходящие из начала координат, постоянно будут «вертеться» около места старта. При других же значениях с они устремляются на «зов бесконечности». Граница этой области, получившая название множества Мандельброта, устроена весьма причудливо. На рис. 11 показаны части границы множества Мандельброта.

И вот что удивительно – среди причудливой связи орнаментов, уходящих в бесконечную глубину, среди разнообразия завитков, спиралей и «протуберанцев» всякий раз перед нами открывается картина изумительной красоты и появляются во много раз уменьшенные копии изначального множества Мандельброта. А в целом возникает бесконечно самовоспроизводящаяся красота, т. е. фрактал (приложение 9).

Интересным примером автоподобной кривой является «кривая дракона», придуманная Э. Хейуэем. Для её построения возьмём отрезок (рис. 12). Повернём его на 90 вокруг одной из вершин и добавим полученный отрезок к исходному. Получим угол из двух отрезков (рис. 13). Повторим описанную процедуру. Повернём угол на 90 вокруг вершины и добавим полученную ломаную к исходной (рис. 14).

Рис. 12

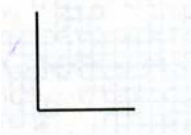


Рис. 13

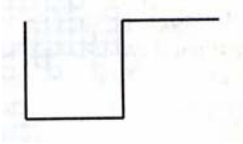


Рис. 14

Повторяя описанную процедуру и уменьшая ломаные, будем получать всё более сложные ломаные, напоминающие дракона (приложение 10). Используя графический редактор Paint, можно строить золотую спираль, самые разнообразные звёзды Кох, кривую Пеано.

Глава III: Геометрические преобразования и паркеты

Применение подобия которые можно увидеть в огромном разнообразии орнаментов – это «паркеты» (мозаики). *Паркетом* называют заполнение плоскости одинаковыми фигурами (элементами паркета), которые не перекрывают друг друга и не оставляют на плоскости пустого пространства (иногда паркетом называют заполнение плоскости несколькими фигурами, например, правильными многоугольниками). Тетрадный лист в клеточку представляет собой простейший паркет. Элементом паркета здесь является квадрат. Элементом паркета является также равносторонний треугольник, правильный шестиугольник, произвольный параллелограмм, даже произвольный четырёхугольник. Можно придумать сотни, тысячи разных элементов паркетов. Некоторые из них изображены на рис. 15.

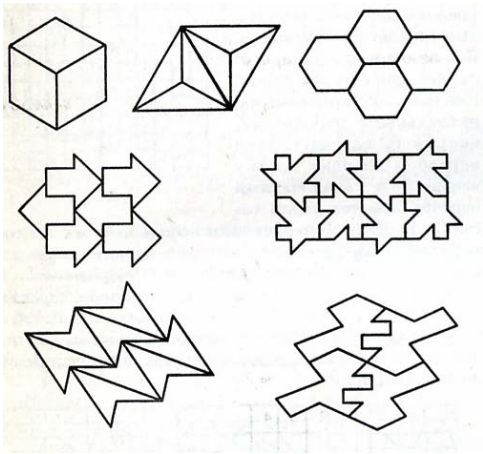


Рис. 15

Придуманы паркеты, у которых несколько элементов образуют фигуру, подобную элементу паркета. Примеры таких паркетов приведены на рис. 16.

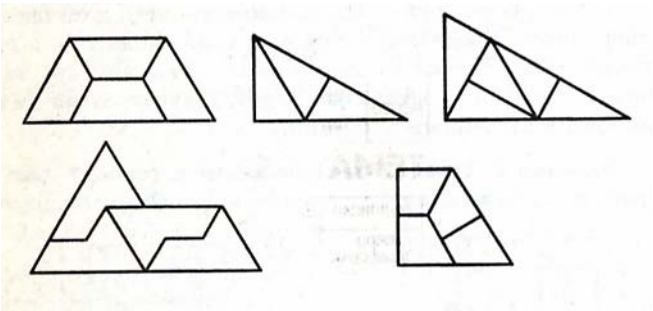


Рис. 16

Замечательные паркеты придумывал знаменитый голландский художник Морис Эшер. Элементами паркета у него служили фигуры животных, птиц, рептилий (приложение 11).

На рис. 17 показан паркет, т. е. заполнение всей плоскости одинаковыми (равными) – фигурами.

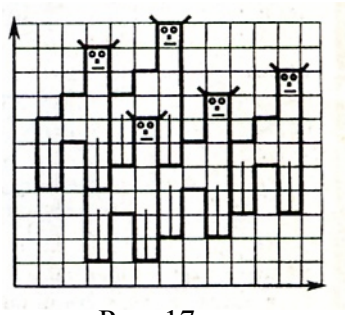


Рис. 17

Как видно из рисунка, этот паркет может быть совмещён сам с собой разными параллельными переносами, например, на три клетки вправо и на одну клетку вверх. Этот параллельный перенос задаётся парой чисел (3;1). Данный паркет так же совмещается сам с собой параллельным переносом, который характеризуется парой чисел (-6;-2), или парой (-2;3).

Можно построить фигуру, симметричную данной (рис. 18) относительно прямой *a*, а за тем сместите полученную фигуру вниз на четыре клетки.

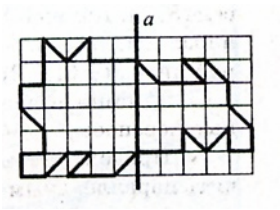


Рис. 18

Заполнить предложенной фигурой плоскость, получив паркет.

Приведённые паркеты способствуют формированию геометрического видения, при изучении геометрических преобразований.

Практическая часть.

Цель: Показать на конкретных примерах, где в жизни встречается подобие, самоподобные фигуры, геометрические преобразования (паркеты), вычислить коэффициент подобия.

Приведу примеры подобия:

самоподобие в природе

Бегония.

В приложении 12 можно увидеть самоподобие.

применение подобия.

Балюстрады и линолеум

В приложении 13 применение подобия можно увидеть в эстетическом зале второго этажа школы №10

Вычислила коэффициент подобия.

ШКОЛА.

Коэффициент подобия равен 0.01.

Представление коэффициента подобия можно увидеть в приложении 14, 15.

Фрактал.

Зыбь воды.

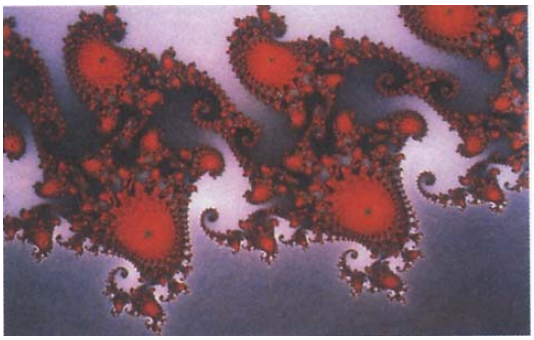
Фрактал можно увидеть и на картине в приложении 15.

Заключение.

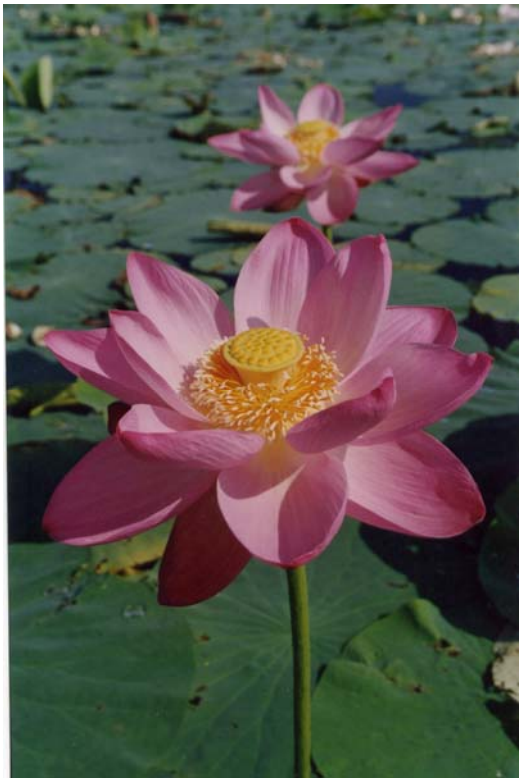
Выполнив эту работу, я расширила свои знания в области геометрии, а именно, в теме: “Подобие”.

Часто можно прочесть, что математика возникла в глубокой древности из практических потребностей людей. По поводу древности математики никто спорить не будет, а вот, о том, что же побудило людей ей заниматься, существует и другое мнение. Согласно ему, математика, так же как и поэзия, живопись, музыка, театр и вообще – искусство, была вызвана к жизни духовными потребностями человека, его, быть может, не до конца осознанным ещё, стремлением к красоте.

Связь математики и красоты по-новому проявились в XX веке, когда были открыты необычайные математические объекты – фракталы, о которых я узнала, изучая данную тему.



Яркие и красочные иллюстрации пробуждают интуицию и воображение. Пёстрая мозаика примеров складывается в единую картину великолепной, стройной и неисчерпаемой математики.



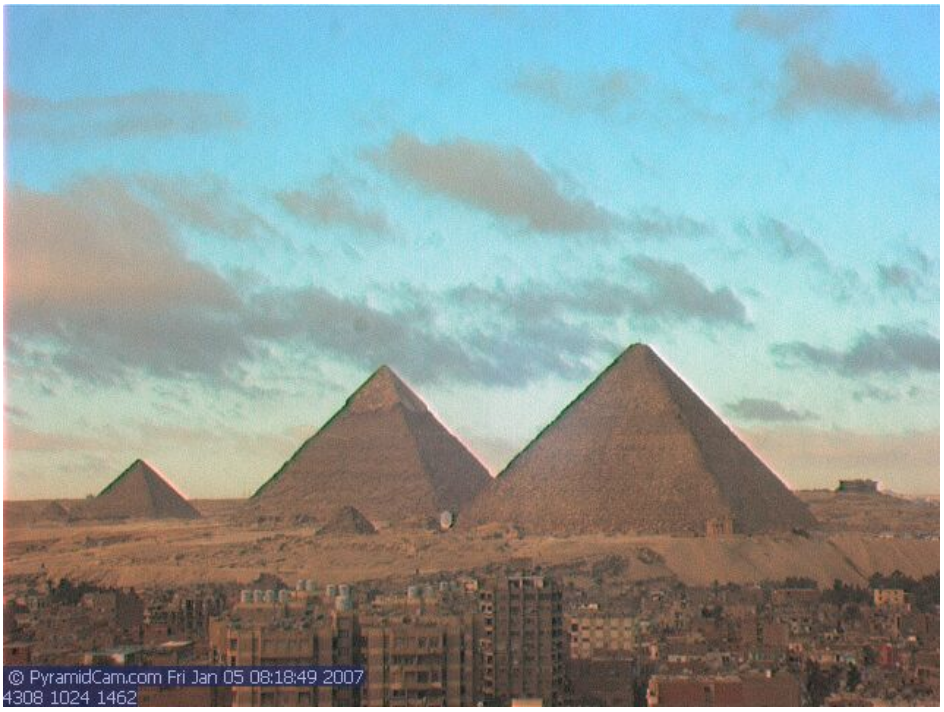
Список литературы.

1) Глейзер, Г. И. История математики в школе: VII – X кл. Пособие для учителей – М.: Правописание, 1981г., 240с.
2) Уоллэйс Роберт Мир Леонардо М.: ТЕРРА, 1997 (Библиотека искусства).
3) Энциклопедия для детей Т. 11. Математика. Главный редактор М. Д. Алексеева – М.: Аванта + , 2000г., 688с.
4) Энциклопедия для школьников по геометрии. Москва Просвещение 1974г. Под редакцией Иванова, Г. И., 524с.
5) Цукарь, А. “Геометрические преобразования и паркеты”. [Текст]/А. Цукарь, Математика. Еженедельное учебно – методическое приложение к газете “Первое сентября” №47 1999г., 32с.
6) Смирнова, И., Смирнов В. “Автоподобные фигуры” [Текст]/И. Смирнова, В. Смирнов, Математика. Еженедельная методическая газета Первое сентября” №15 2002г., 32с.

Приложение

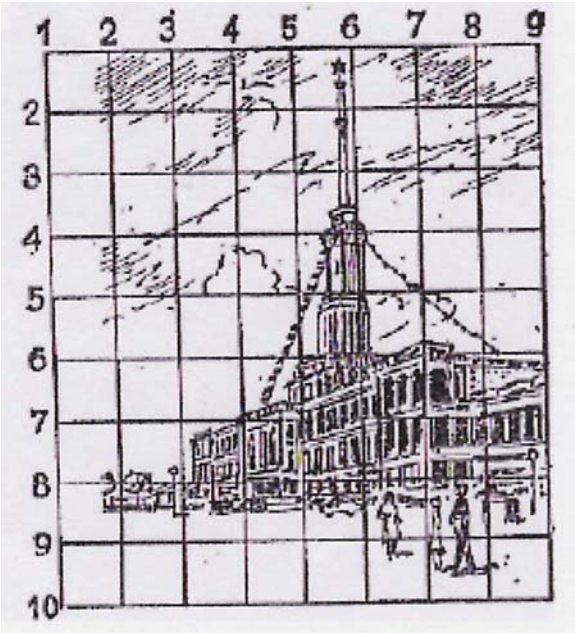
Приложение 1.

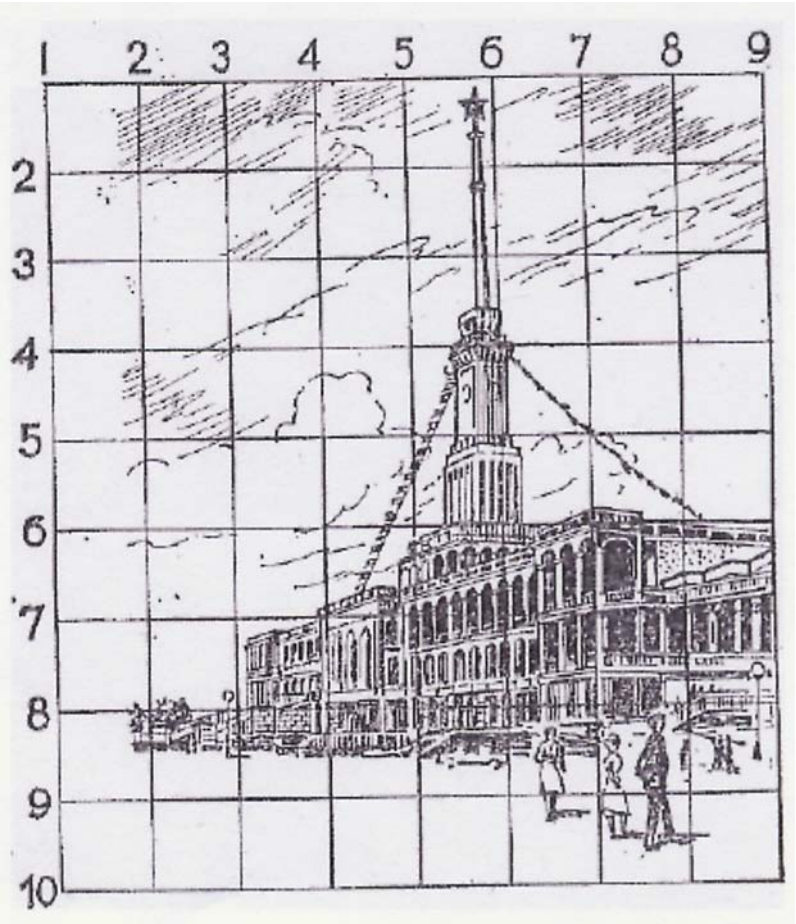
Пирамиды Гизы.



Приложение 2.

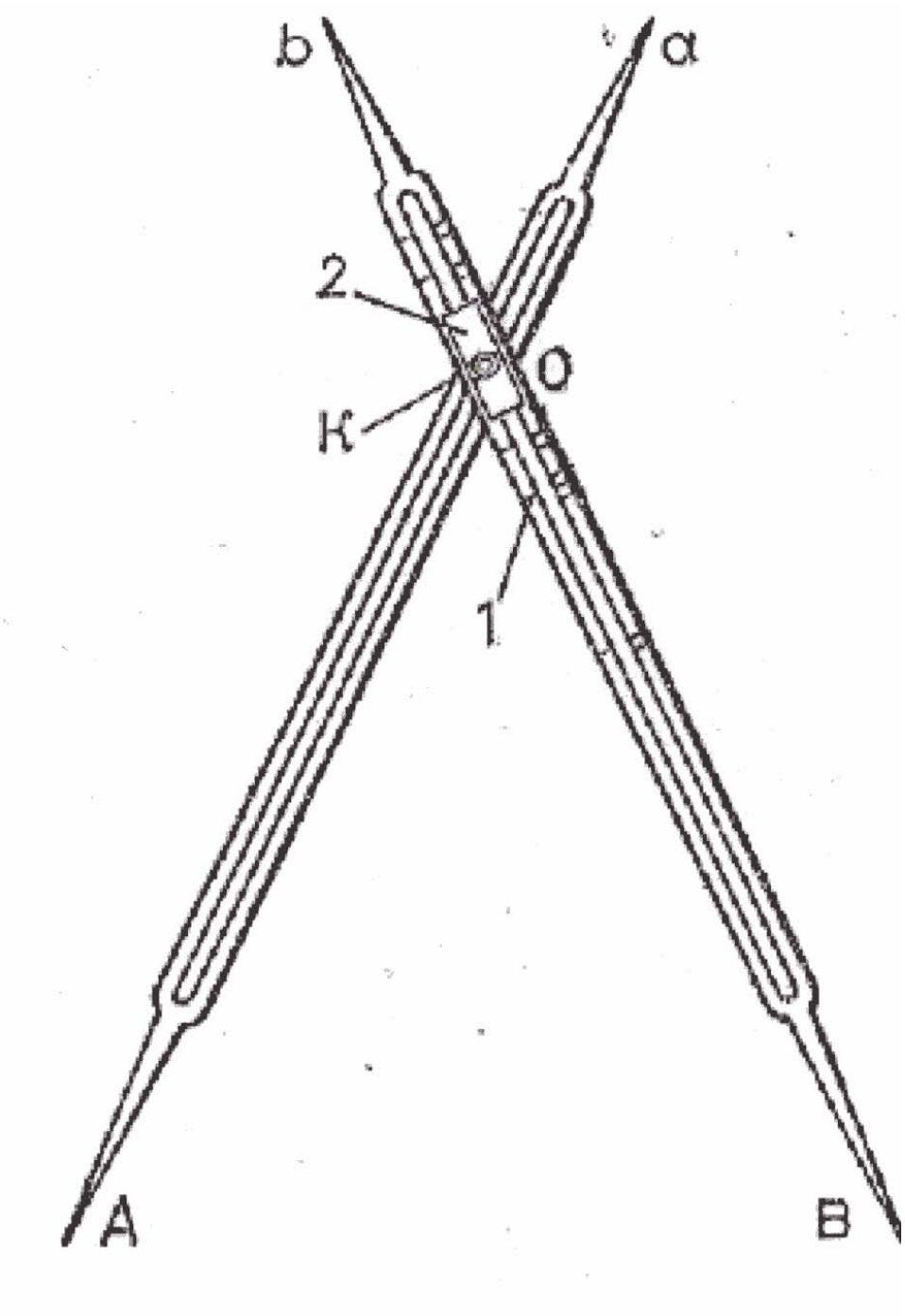
Уменьшение рисунка в отношении 3:5 способом палетки.



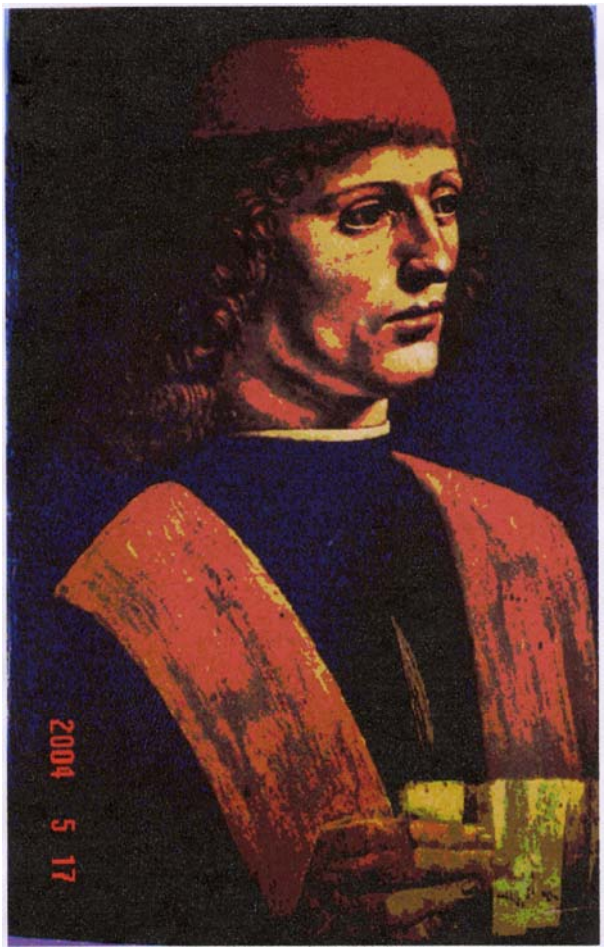


Приложение 3.

Пропорциональный циркуль.



Приложение 4.



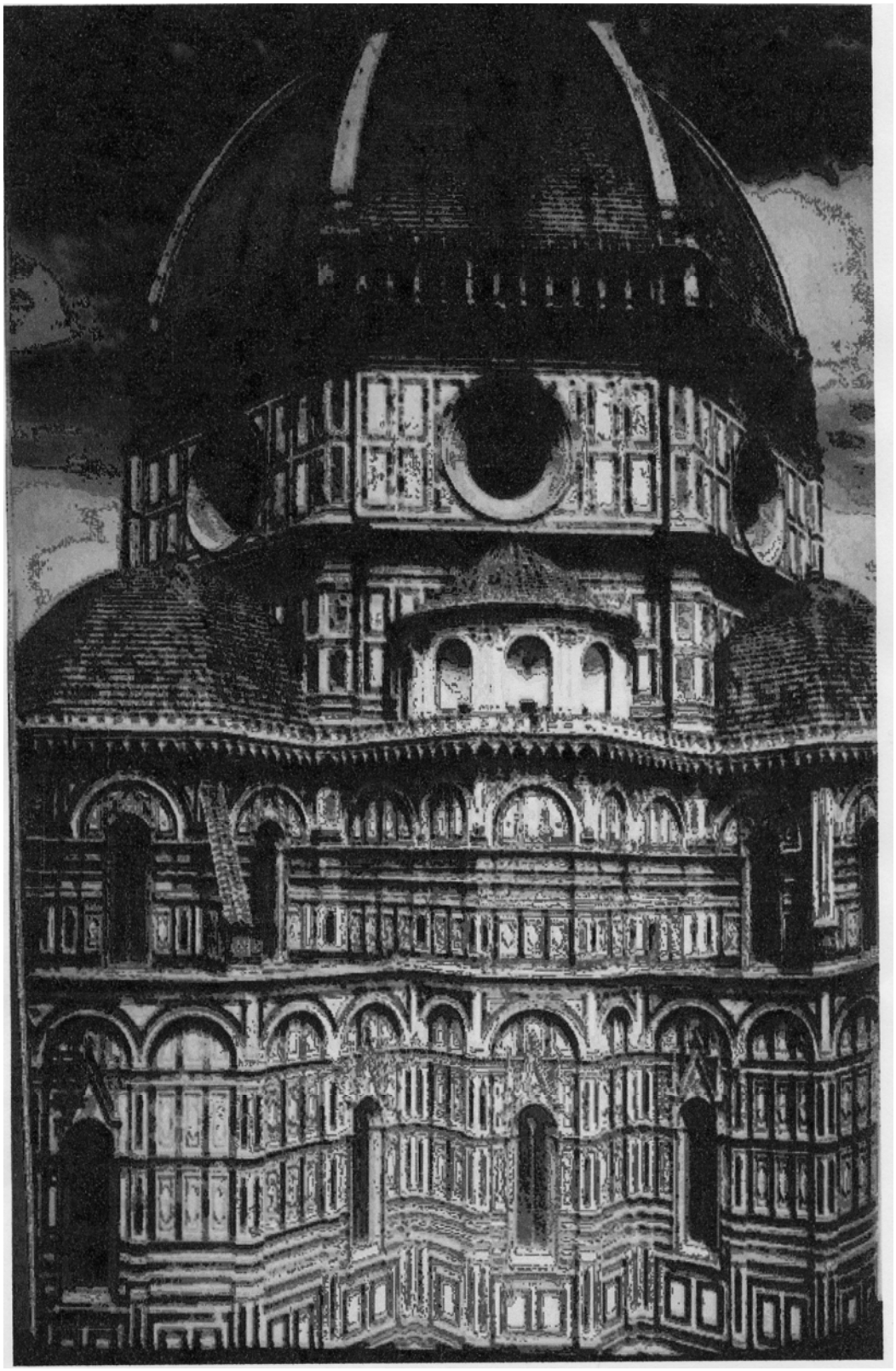
Портрет музыканта

Мадонна в скалах

Имя этого молодого человека неизвестно, нет сведений и о том, что портрет был кем – то заказан. Лицо музыканта чрезвычайно похоже на лицо ангела с картины “Мадонна в скалах”.

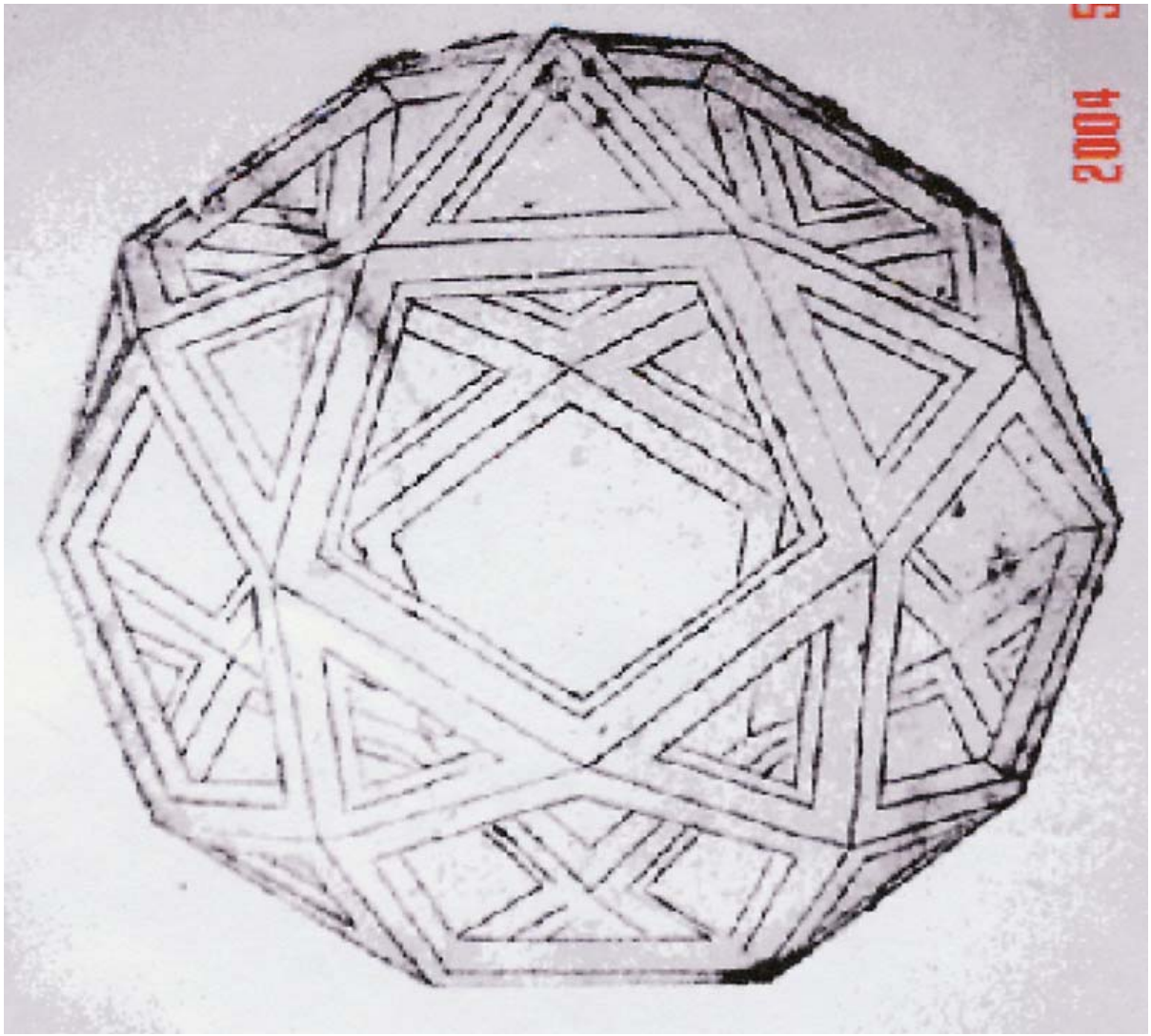
Приложение 5.

Флоренский собор.



Приложение 6.

Многогранник.



Многогранник, одна из наиболее таинственных трёхмерных геометрических фигур, появляется во многих видах в иллюстрациях Леонардо к книге фра Луки Пачоли “De Divine Proportion” (“О Божественной пропорции”). Пропорция имела для Леонардо Основополагающее значение “не только… в исчислениях и измерениях, но и в звуках, весах, положениях – в любом месте, где они могут быть”.

<u>Приложение 7.</u>

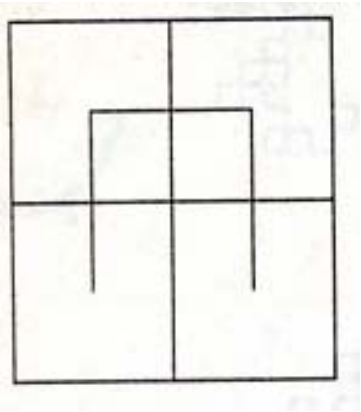
Автоподобие.

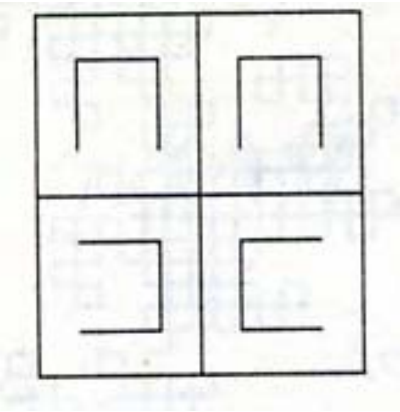
Подсолнух.

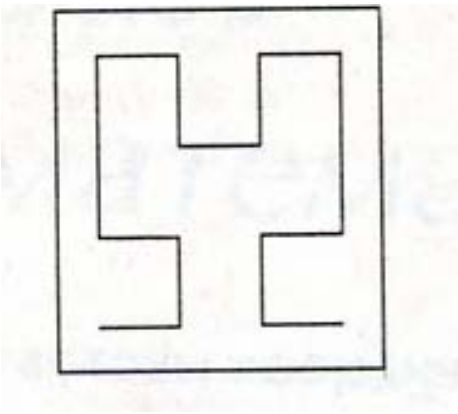
Спиральная галактика.

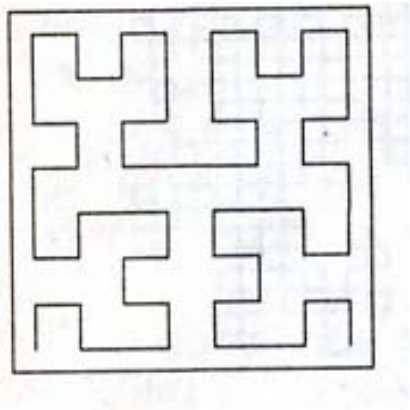
Приложение 8.

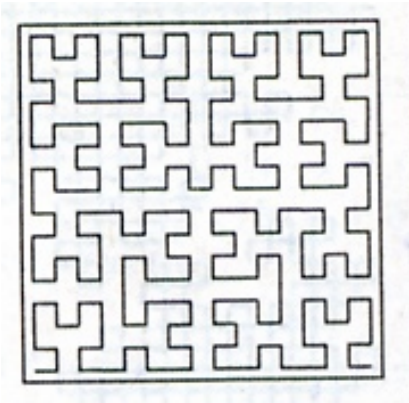
Кривая Пеано.

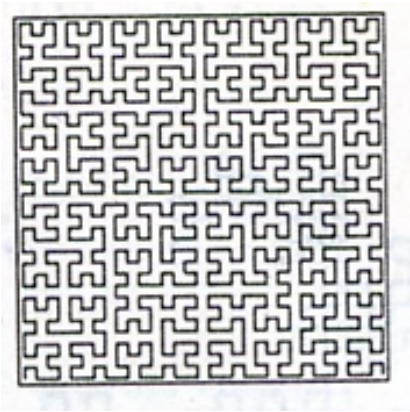






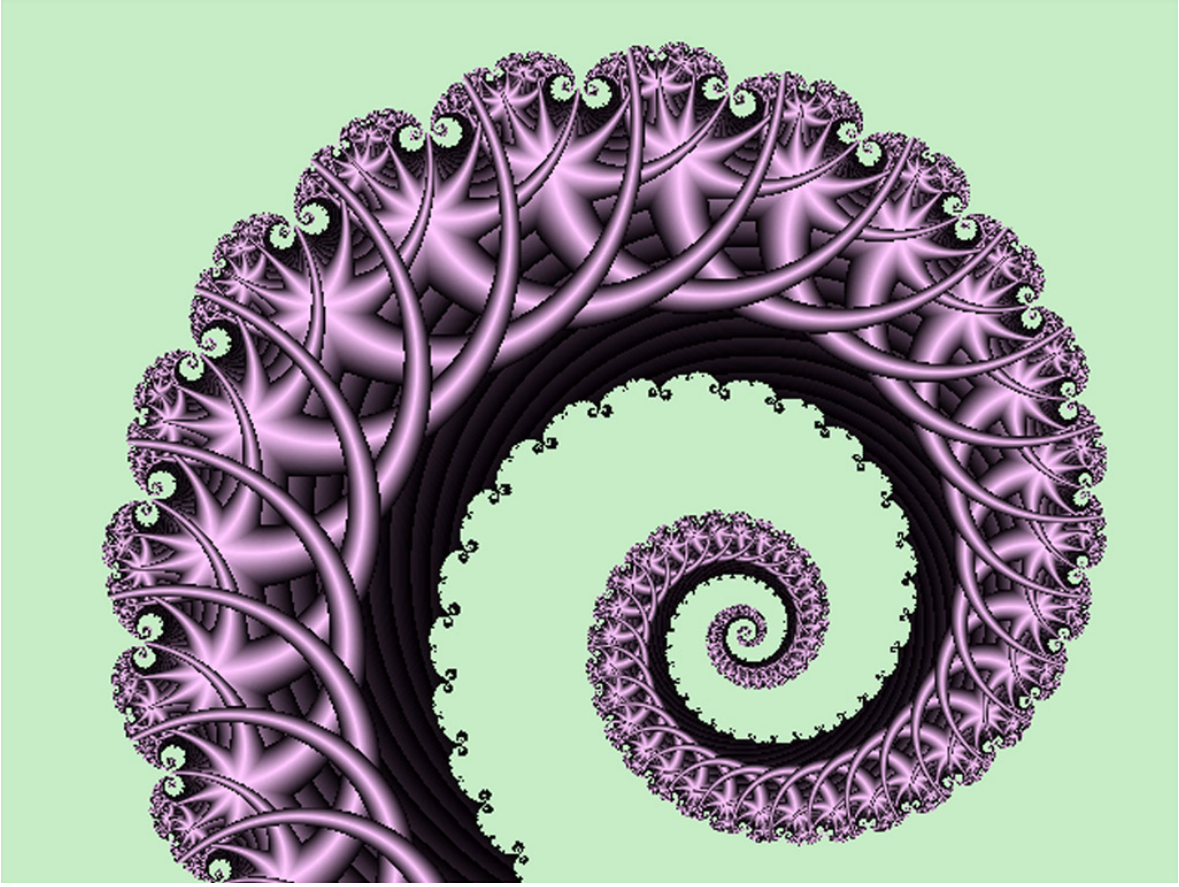


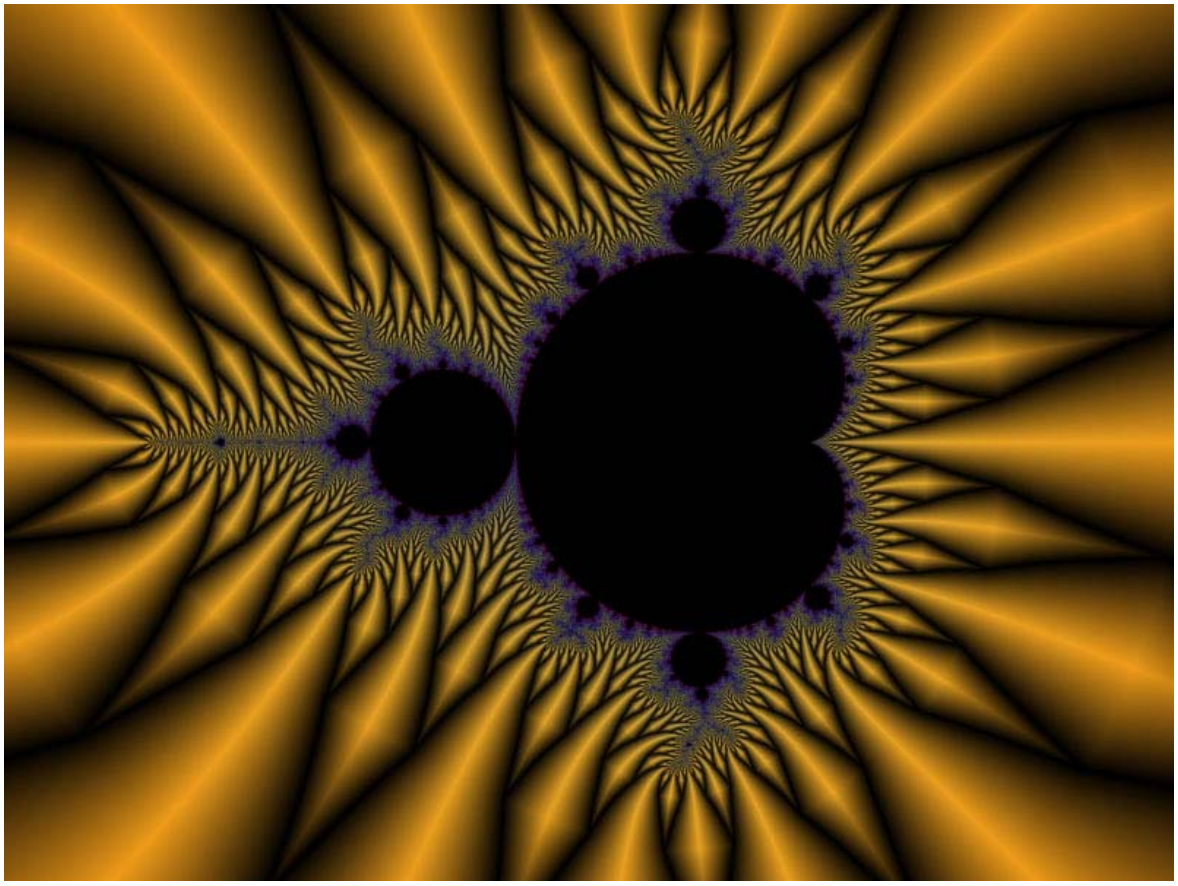




Приложение 9.

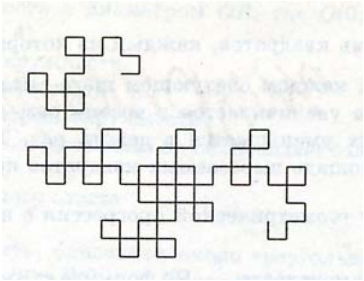
Фракталы.

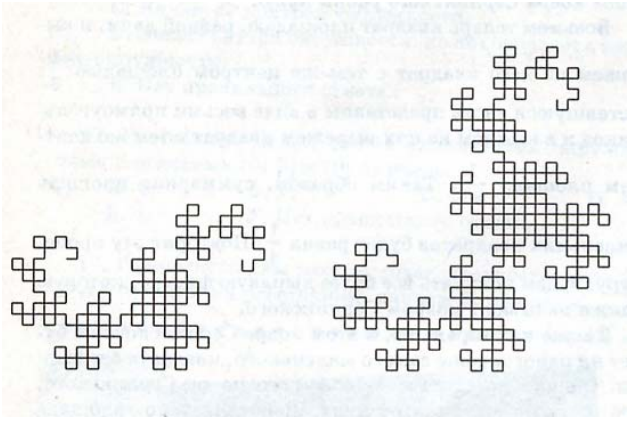


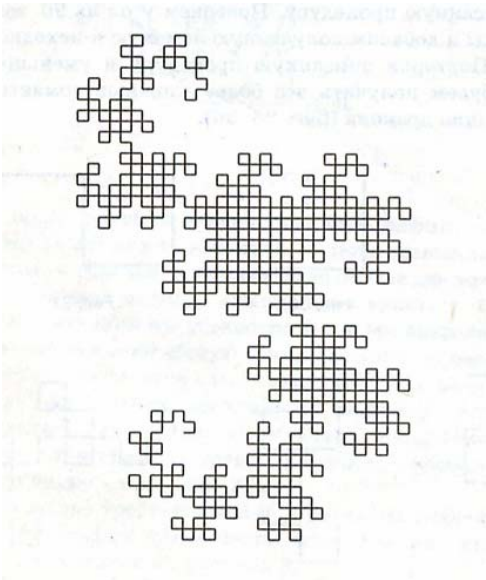


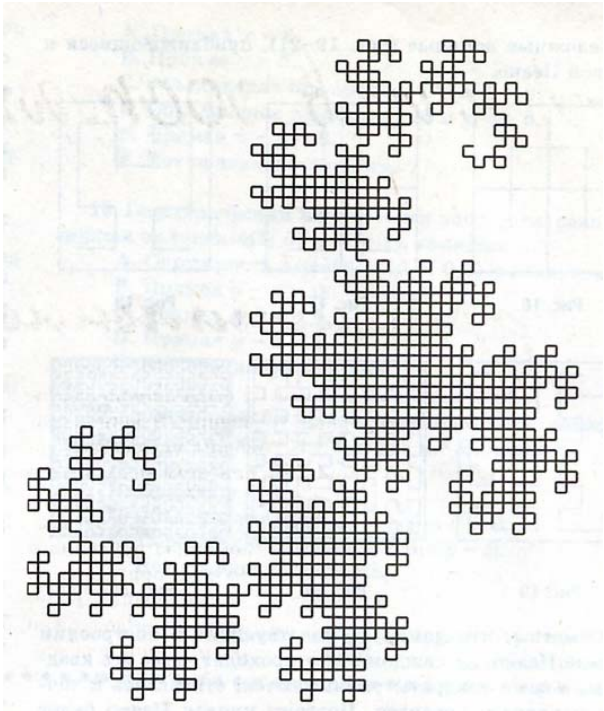
<u>Приложение 10.</u>

Ломаные, напоминающие дракона.





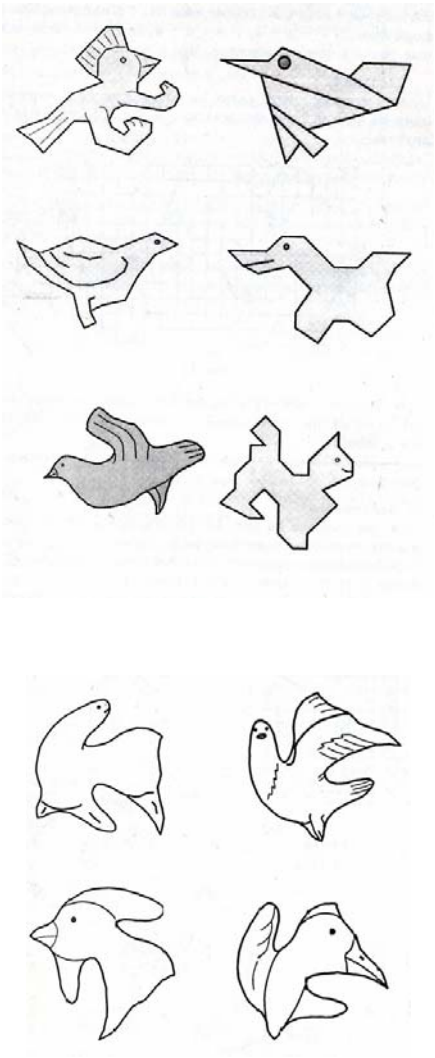




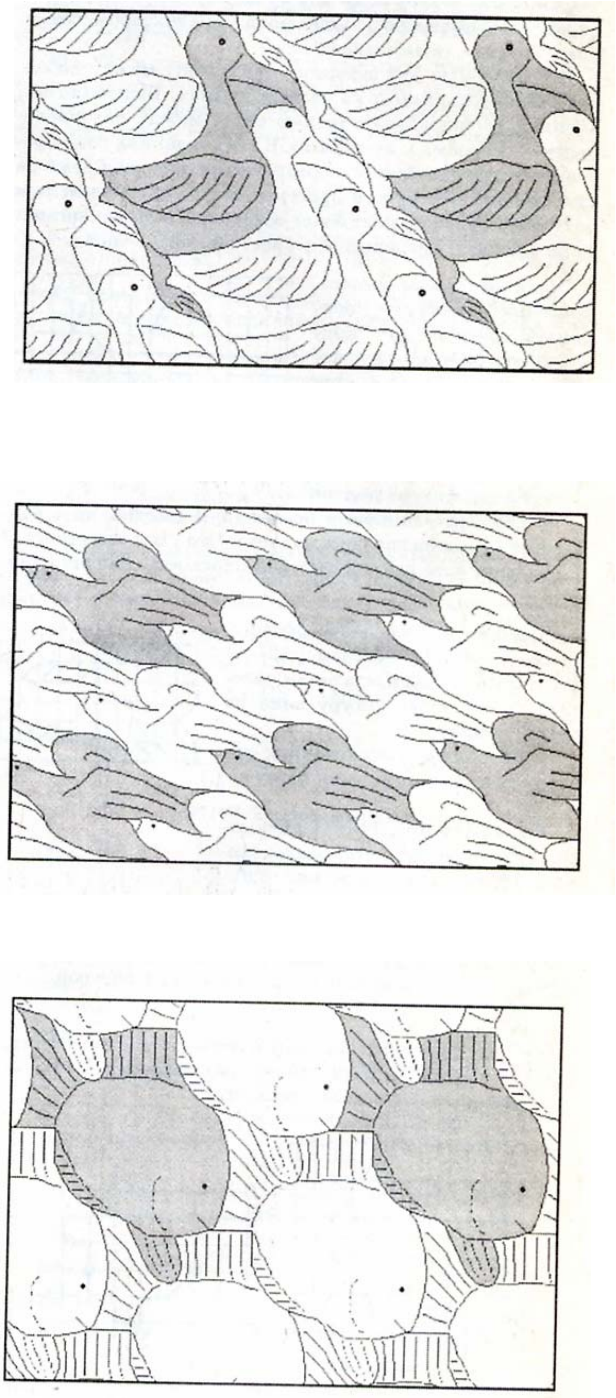
Приложение 11.

Элементы паркета.

Каждой из фигурок можно заполнит плоскость, получив паркет.



Представлены паркеты, придуманные автором, Морисом Эшером.



Приложение 12.

Самоподобие в природе.

Папоротник.

Кактус.

Приложение 13.

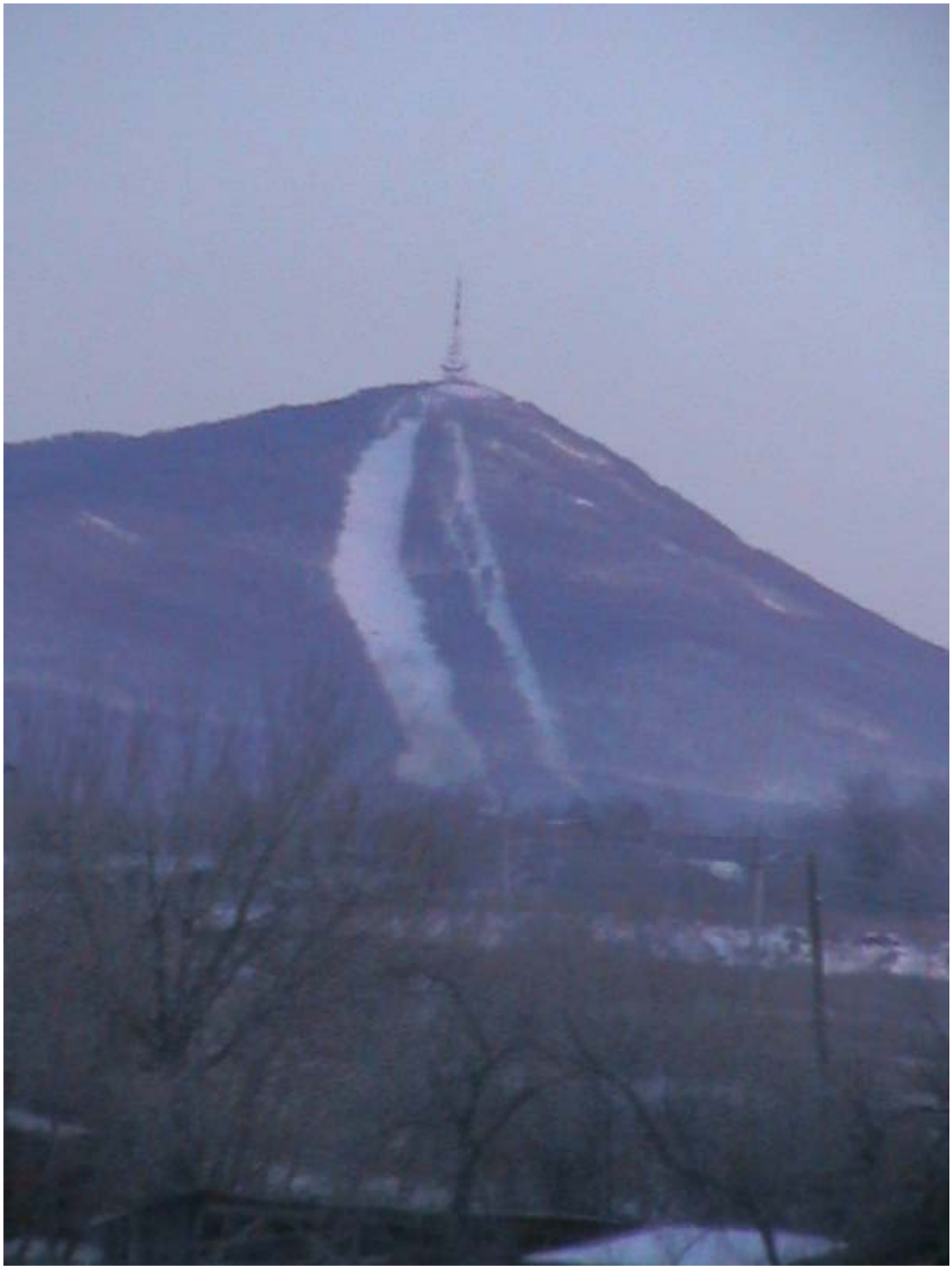
Применение подобия.

Эстетический зал на втором этаже школы №10.

<u>Приложение 14.</u>

Сопка обзорная.

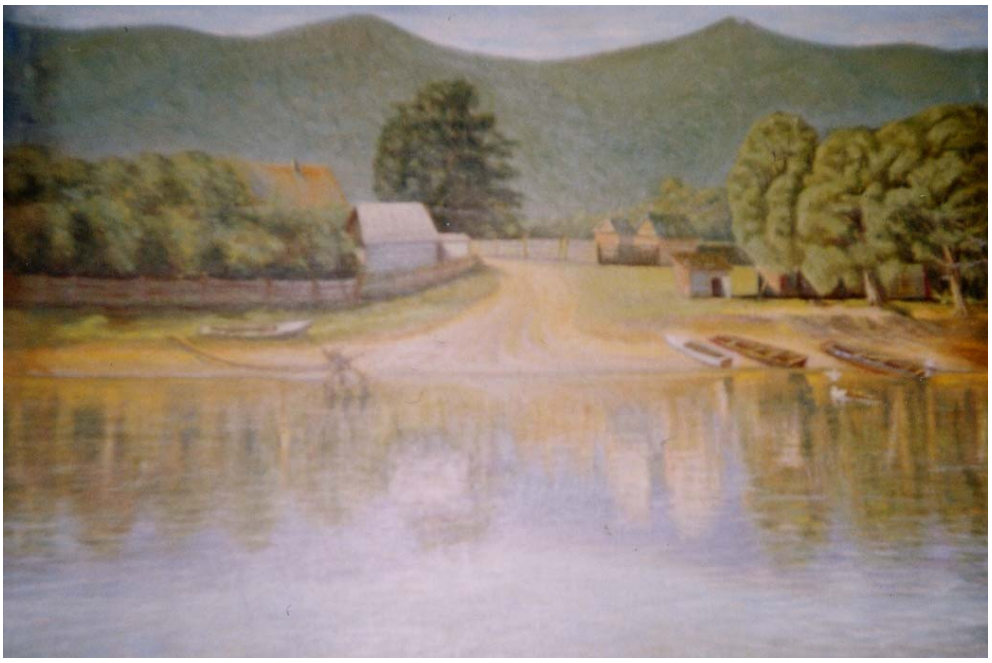
<u>Коэффициент подобия равен 0.00012.</u>



<u>Приложение 15.</u>

Картины.

<u>Коэффициент подобия равен 0.18.</u>



На этой картине можно увидеть фрактал: зыбь воды, облака.