

Муниципальное образовательное учреждение
средняя образовательная школа №14 «Зеленый шум».



лента Мёбиуса

Автор: Зубкова Юлия, 10 и
Научный руководитель: Лопатина И. С.

г. Волжский
2008 г.

Цель

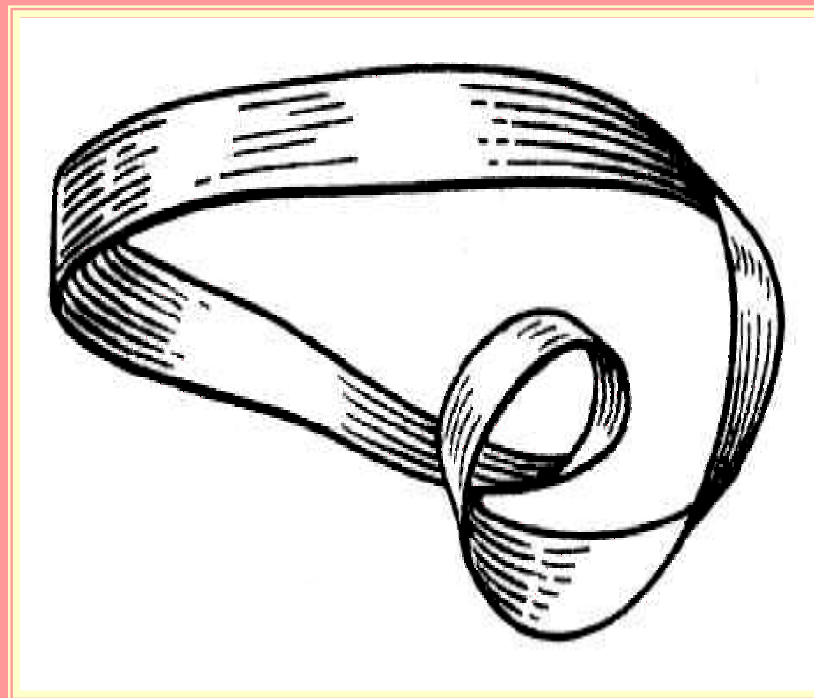
- Изучить свойства ленты Мёбиуса и их применение.

Содержание

1. Изображение ленты.
2. Определение.
3. История создания.
4. Главная ценность.
5. Изготовление ленты Мёбиуса.
6. Типы лент.
7. Свойства.
8. Топология и геометрия.
8. Применение.
9. Подобные объекты.
10. Открытые проблемы.
11. Тесты, опыты, задания.
12. Стихи.
13. Крылатые фразы и выражения.
14. Выводы.
15. Литература.

Изображение ленты

Лист - это не движение
по циклу. Это -
стремление в
бесконечность.
И никаких проколов!



Определение

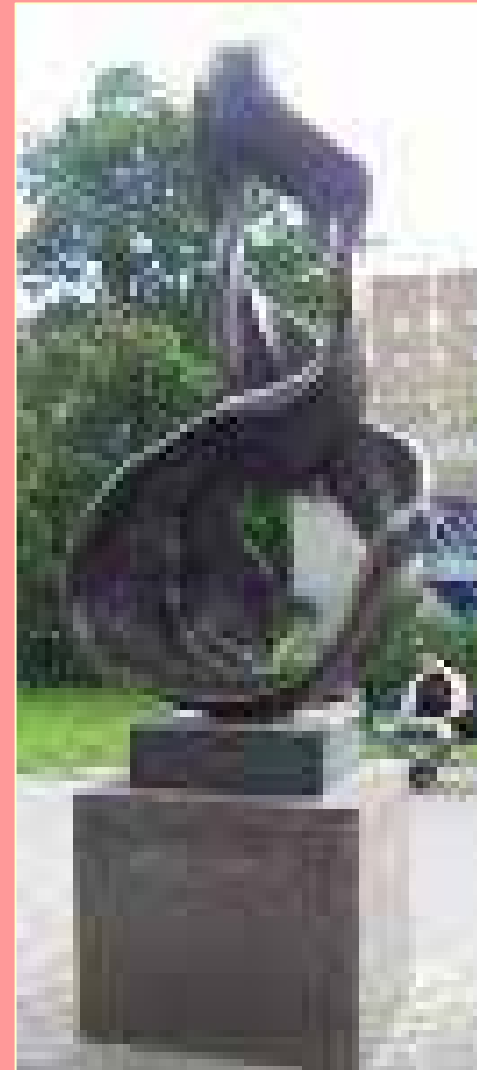
Лист Мёбиуса - пространство нетривиального расслоения над окружностью.

Лист Мёбиуса - неориентируемая поверхность с краем.

История создания

Лист Мёбиуса - простейшая односторонняя поверхность, названная так в честь немецкого математика А. Мёбиуса, открывшего его необычайные топологические свойства в 1858 году.

Лист Мёбиуса прародитель символа бесконечности (но это не соответствует действительности).



Август Фердинанд Мёбиус

(17.11.1790 – 26.09.1868)

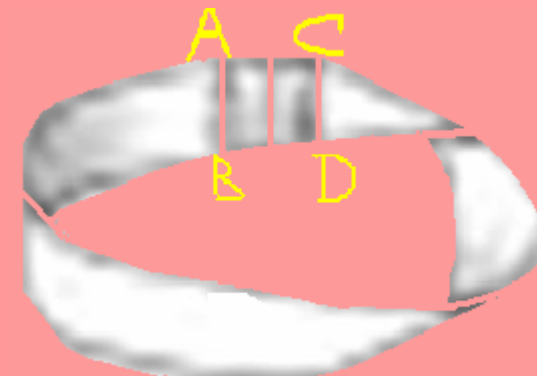
- ☉ Родился в Шюльпфорте.
- ☉ Немецкий геометр и астроном, профессор Лейпцигского университета.
- ☉ Некоторое время под руководством К. Гаусса изучал астрономию.
- ☉ С 1816 г. начал самостоятельные астрономические наблюдения.
- ☉ Известны труды по проективной геометрии.

Главная ценность

Лист Мёбиуса дал толчок новым обширным математическим исследованиям. Именно поэтому его часто считают символом современной математики.

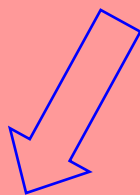
Изготовление

Пусть $ABCD$ – прямоугольная полоска бумаги. Если склеить точку A с точкой B , а точку C с точкой D , то получится кольцо с внутренней поверхностью, наружной поверхностью и двумя краями. Одну сторону кольца можно окрасить. Окрашенная поверхность будет ограничена краями кольца. Но если полоску перед склеиванием концов перекрутить на 180° и склеить точку A с точкой C , а B с D , то получится лист Мёбиуса.



ТИПЫ ЛЕНТ

В евклидовом пространстве существуют два
типа полос Мёбиуса в зависимости от
направления закручивания:



Правые



Левые

СВОЙСТВА

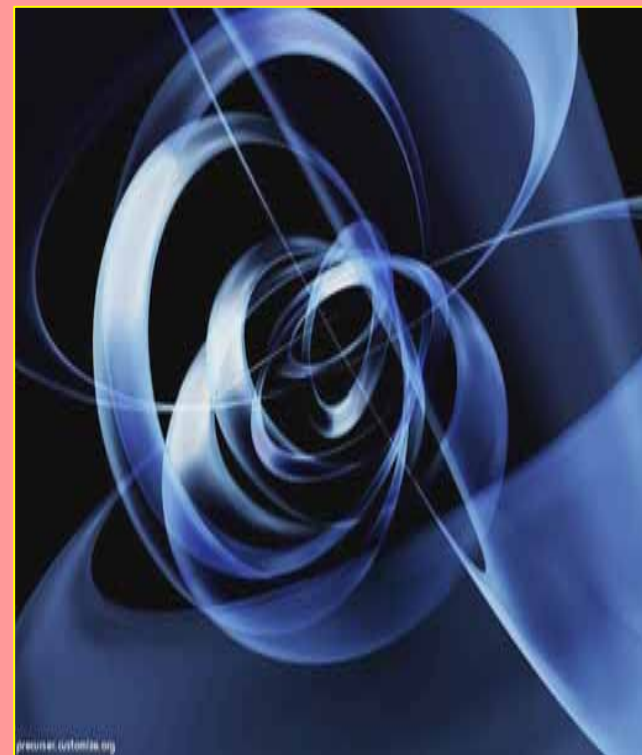
- ⓐ Граница листа Мебиуса есть линия, гомеоморфная окружности.
- ⓑ Он имеет один край, одну сторону, не связанные с его положением в пространстве, с понятиями расстояния, угла и тем не менее имеют вполне геометрический характер.
- ⓒ Разрезанный лист Мебиуса уже двусторонний, а не односторонний.
- ⓓ Свойство односторонности не исчезает у поверхности, если ее гнуть, растягивать, сжимать, но не склеивать и не рвать.
- ⓔ «Хроматический номер» = 6.

- ⓐ Если разрезать ленту по средней линии, вместо двух лент Мёбиуса получится одна длинная двухсторонняя (вдвое больше закрученная, чем лента Мёбиуса) лента. Если теперь эту ленту разрезать посередине, получаются две ленты, намотанные друг на друга.
- ⓑ Если разрезать ленту Мёбиуса, отступая от края приблизительно на треть её ширины, то получаются две ленты, одна — более тонкая лента Мёбиуса, другая — длинная лента с двумя полуоборотами (Афганская лента). Разрез ленты Мёбиуса с дополнительными оборотами даёт неожиданные фигуры, названные парадромными кольцами.

Топология

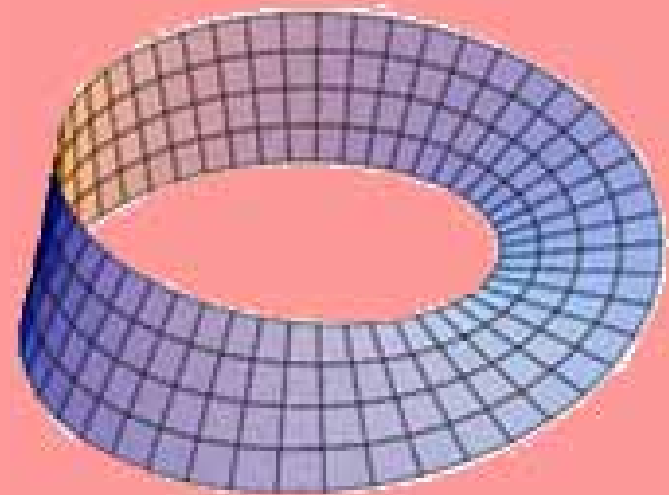
Лист Мёбиуса - один из объектов топологии.

В топологии изучаются свойства фигур и тел, которые не меняются при их непрерывных деформациях.



Топологические свойства

- ⓐ Односторонность.
- ⓐ Непрерывность.
- ⓐ Связность.
- ⓐ Ориентированность
(не присуща листу Мёбиуса).
- ⓐ «Хроматический номер».



- Одним из способов представления листа Мёбиуса как подмножества \mathbb{R}^3 является параметризация:

$$x(u, v) = \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \cos(u), \quad y(u, v) = \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin(u),$$

$$z(u, v) = \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2},$$

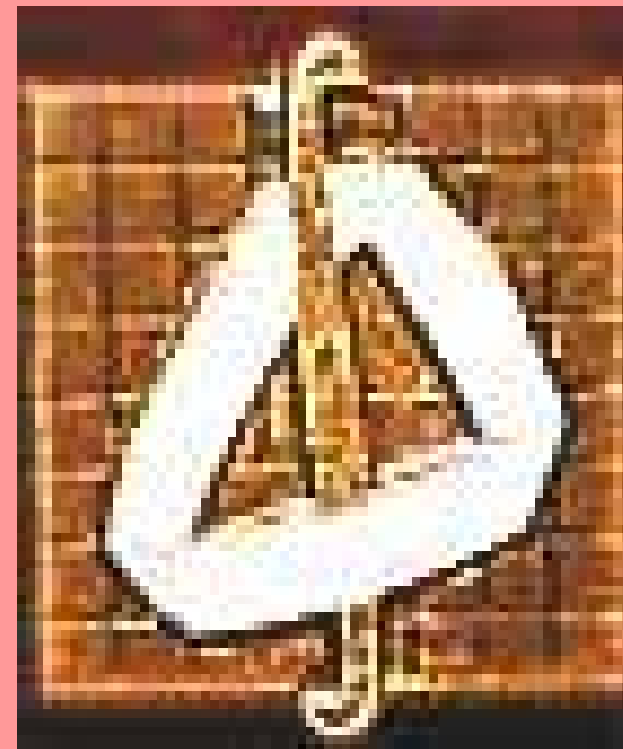
где $0 \leq u < 2\pi$ и $-1 < v < 1$

- Эти формулы задают ленту Мёбиуса ширины 1, чей центральный круг имеет радиус 1, лежит в плоскости x - y с центром в $(0,0,0)$. Параметр u пробегает вдоль ленты, в то время как v задает расстояние от края.
- Топологически лист Мёбиуса может быть определен как фактор-пространство квадрата $[0,1] \times [0,1]$ по отношению эквивалентности $(x,0) \sim (1-x,1)$ для $0 \leq x \leq 1$.

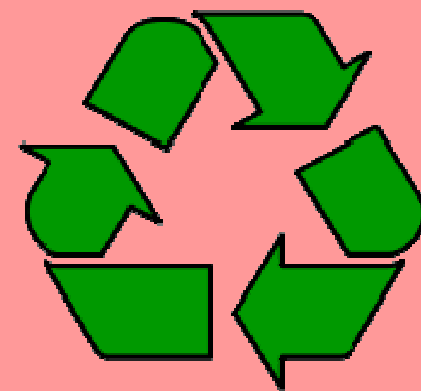
Применение

- ④ Искусство.
- ④ Научная фантастика.
- ④ Полоса ленточного конвейера выполнялась в виде ленты Мёбиуса.
- ④ Системы записи на непрерывную плёнку.
- ④ Матричные принтеры: красящая лента.
- ④ Гипотеза: спираль ДНК - фрагмент ленты Мебиуса.
- ④ Оптические законы.
- ④ Резистор Мёбиуса.

Лист Мёбиуса изображают
на различных эмблемах
и значках, как, например,
на значке механико —
математического
факультета
Московского университета.

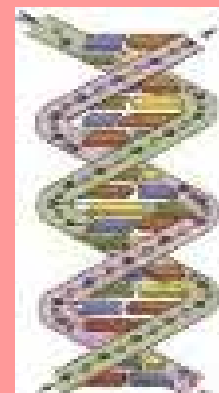
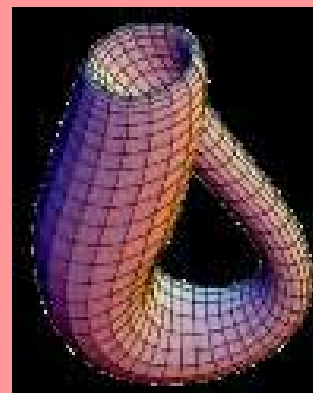
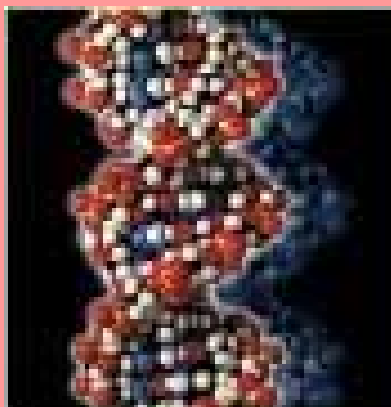


*Международный
символ переработки
представляет собой
Лист Мёбиуса*



Подобные объекты

- ⓐ Бутылка Клейна.
- ⓐ Вещественная проективная плоскость.
- ⓐ Спираль ДНК.
- ⓐ Гипотеза: наша Вселенная замкнута в ленту Мёбиуса.



Открытые проблемы

- ❏ Каково минимальное k такое, что из прямоугольника с меньшей стороной 1 и большей стороной k можно свернуть несамопересекающуюся ленту Мебиуса (бумагу мять не разрешается)?

Ответ: Доказанная оценка снизу $\frac{\pi}{2}$, сверху $\sqrt{3}$ см.

- ❏ Существует ли формула, описывающая лист Мебиуса, получающийся путем складывания плоского листа бумаги?

Ответ: Таких формул существует бесконечно много.

- ❏ Как найти форму, которая минимизирует упругую энергию изгиба.

Ответ: Решить краевую задачу для системы дифференциально-алгебраических уравнений.

Тест

(полоски длиной примерно 30см и шириной 3см).

Опыт № 1

Склейте два кольца- одно простое и лист Мёбиуса. Разрежьте каждое из них пополам вдоль. Что у Вас получилось:



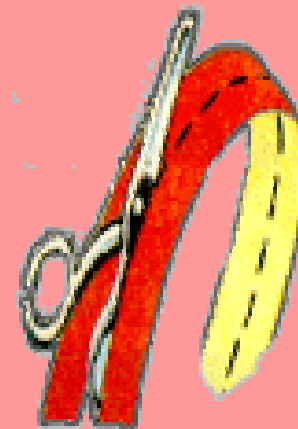
2 простых и 1 кольцо Мёбиуса.



Чёрте что и с боку бантик.



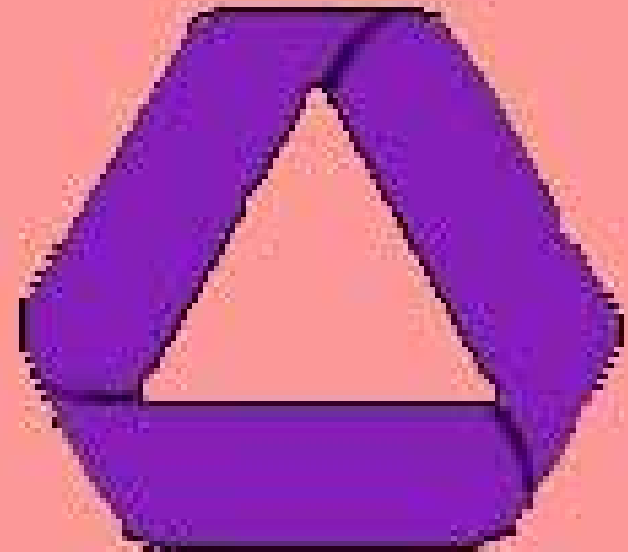
1 простое и 2 кольца Мёбиуса .



Опыт № 2

Чтобы получить ленту Мёбиуса, мы поворачиваем полоску бумаги на пол оборота. А интересно что у вас получится, если вы склеите ленту, сделав полный оборот, и получившееся кольцо разрежете пополам вдоль?

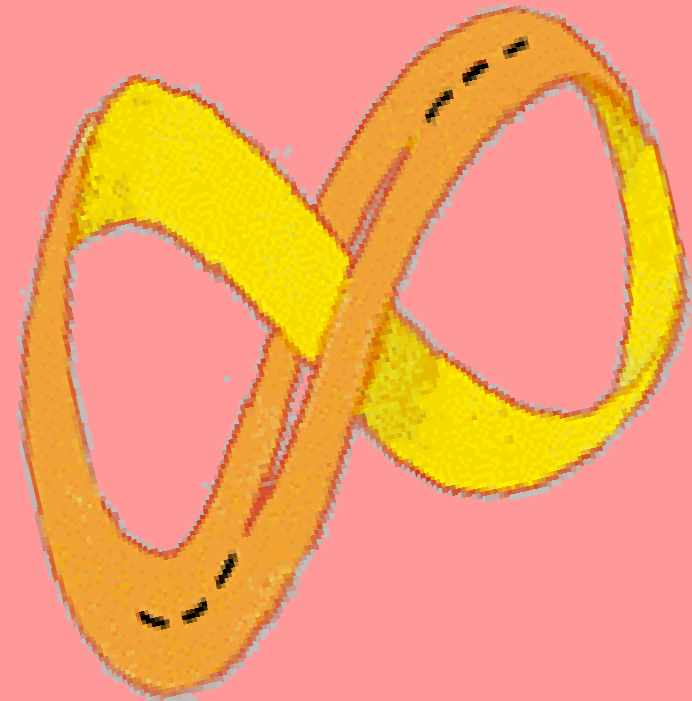
- ☐ Одно кольцо, но большое.
- ☐ Два кольца, но каждое само по себе .
- ☒ Два кольца, причем сцепленных.



Опыт № 3

Попробуйте прорезать в полосе щель и продеть сквозь нее один конец полосы. (как показано на рисунке) А теперь попробуйте продолжить разрез вдоль всей ленты. Что у вас получилось, если не секрет:

- ⓐ Два кольца Мёбиуса.
- ☑ Вывернутое, но простое кольцо.
- ⓐ Получилась штука, что ни пером описать, ни в сказке рассказать.



Опыт

Число перекручиваний	Результат разрезания	Свойства
0	2 кольца	Длина окружности та же, но кольцо в два раза уже
1	1 кольцо	Кольцо перекручено дважды, оно вдвое длиннее
2	2 кольца	Два сцепленных друг с другом кольца, каждое из которых дважды перекручено
3	1 кольцо	Кольцо перекручено 6 раз и оно вдвое длиннее и уже с множеством перегибов

Опыты

☉ На обеих сторонах ленты на равном расстоянии от краев провести по две пунктирные линии. Склеить лист Мёбиуса. Разрезать по пунктирным линиям. Описать результат.

Результат: 2 кольца. Одно из них вдвое длиннее первоначальной ленты и вдвое перекручено. Оно получилось из краев исходной ленты. Другое - лист Мёбиуса - состоит из центральной части исходного листа Мёбиуса.

☉ Прогноз для подобного опыта, когда лента не перекручена.

Результат: Два тонких кольца и центральная часть.

ⓐ На ленту шириной 5 см нанесите пунктир, отступив от края на 1 см, 2 см, 3 см и 4 см. Сделайте из неё лист Мёбиуса. Что получится, если разрезать его по пунктиру?

Результат:

3 кольца:

I - лист Мёбиуса - 1 перекрут, ширина 1 см, длина равна длине исходного кольца.

II, III - кольца с двумя перекрутами, ширина 1 см, длина в 2 раза больше исходного листа, сцеплены с I и между собой.

Вопрос

Можно ли из квадратного листа сделать ленту Мёбиуса?

Ответ: Можно, но при условии, что бумагу разрешается мять: нужно квадрат сложить в гармошку и из нее склеить ленту.

А если бумажную полоску можно изгибать, но не мять?

Задача

Вычислить k – нижнюю грань длин бумажных полосок ширины 1, из которых можно склеить несмятую ленту Мёбиуса.

Решение:

1. $k \geq \pi/2$
2. $k \leq \sqrt{3}$

Почему не удастся найти k точнее?

Допустим, что лента Мёбиуса самопересекающаяся.

3. Ленту Мёбиуса с самопересечениями можно склеить из полоски длиной больше $\pi/2$

Ответ: Можно ожидать, что $k \neq \sqrt{3}$

СТИХИ

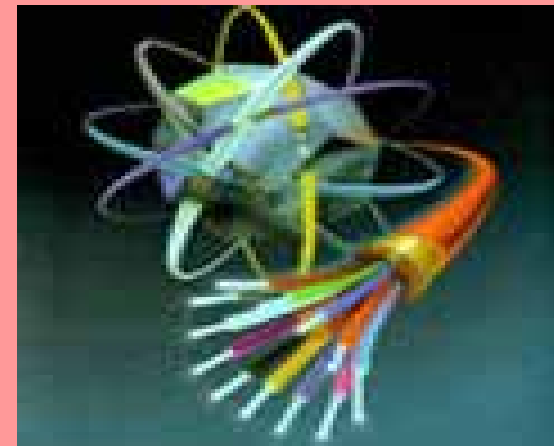
Лист Мёбиуса прост?
Не знаю...
Он многим видится
другим...
Я не пойду к крутому
краю...
Мне долгий путь
необходим,
Такой, чтоб был так
труден,
Так неизучен, так
тернист...
И чтоб не ведать, что же
будет,
Когда вдруг повернется
лист...

Лист Мебиуса - символ математики,
Что служит высшей мудрости венцом...
Он полон неосознанной романтики:
В нем бесконечность свернута кольцом.
В нем – простота, и вместе с нею – сложность,
Что недоступна даже мудрецам:
Здесь на глазах преобразилась плоскость
В поверхность без начала и конца.
Здесь нет пределов, нет ограничений,
Стремись вперед и открывай миры,
Почувствуй силу новых ощущений,
Прими познания высшего дары:
Познай любовь и ненависть изведай,
Низвергнись в ад – тотчас увидишь рай.
Ты в одночасье насладись победой
И горечь поражения испытай.
На грани бесконечного блаженства
Испытывая суеверный страх,
Найдешь свой путь. Достигнув совершенства,
Окажешься в таинственных мирах.
И, вдохновленный этим дерзновеньем,
По экспоненте поднимаясь в высь,
Ты ощутишь восторг освобожденья,
Почувствуешь, как возникает Мысль.
Покажется, что распростерлась Вечность,
Что взломан Мироздания пароль.
И вдруг твое стремленье в бесконечность
Тебя вернет к исходной точке: в ноль.
Как о порог, об этот ноль споткнешься.
Но как бы ни был прежний путь тернист,
Вновь выбирай (и ты не ошибешься!)
Путь в бесконечность – Мёбиуса лист!

Лист Мёбиуса –
желтая страница,
Односторонки
сказочный маршрут,
Летит метелью,
песенкой, синицей,
Бульварной лентой,
склеенный лоскут.

Односторонний - из
конца в начало,
Трамвайным визгом,
парной штангой дуг,
Мой транспорт синий
тянется к вокзалу
По городу, наматывая
круг.

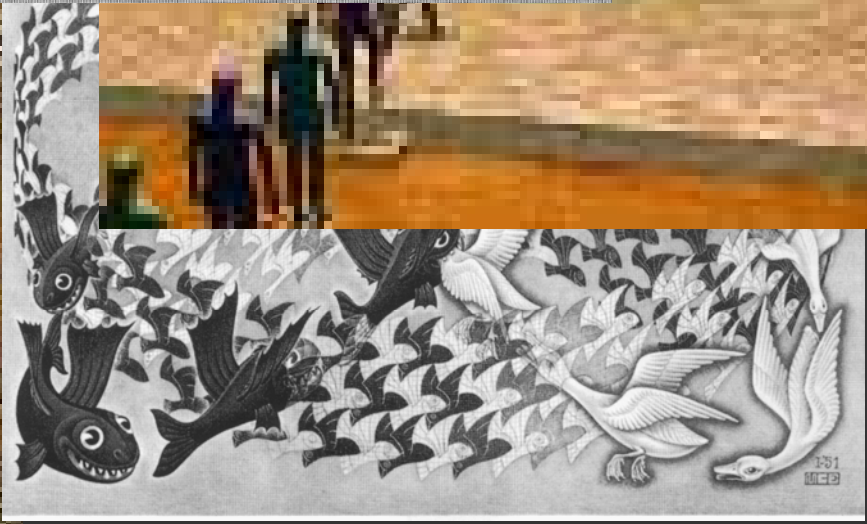
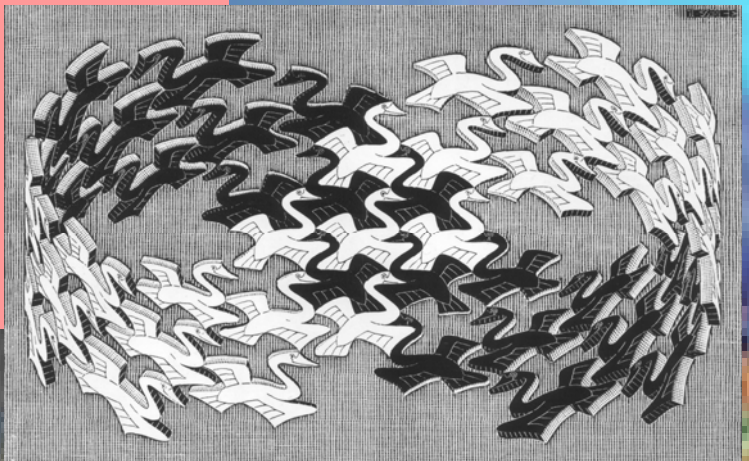
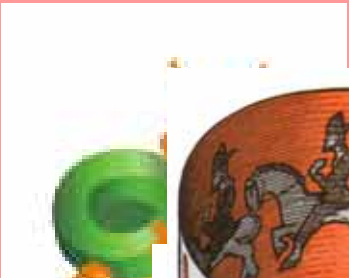
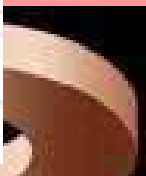
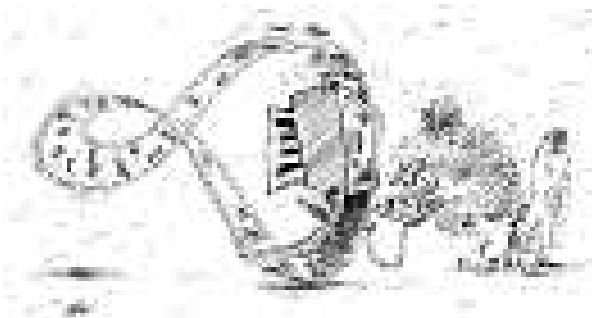
Эх, Мёбиус, спасибо за
науку!
Поверхность одинокой
стороны
Подобна
закольцованному звуку,
Вибрацией неоновой
струны.



Крылатые фразы

Лист Мёбиуса - вещь удивительная во всех отношениях, поэтому и открывается каждому из нас по-разному.
И все правы...





Возможно, самая
распространенная русская
математическая шутка —
"кошка, которая гуляет сама по
себе - кошка Мёбиуса".



ВЫВОДЫ

При написании творческой работы получены следующие результаты:

- ④ Сформулировано понятие ленты Мёбиуса.
- ④ Изготовлена лента Мёбиуса.
- ④ Доказаны свойства ленты.
- ④ Рассмотрено применение.
- ④ Решены задачи, тесты по данной теме.

Литература

- ◆ Атанасян Л. С., Гурьевич Г. Б. Геометрия. – Ч.2. – М.: Просвещение, 1976.
- ◆ Квант: научно-популярный журнал. – 1975, № 7; 1977, № 7.
- ◆ Смирнов С. Г. Библиотека «Математическое просвещение». – Вып. 27. – М.: МЦНМО, 2003.
- ◆ Интернет – ресурсы.