Департамент Образования города Москвы
Северо-Западное окружное управление образования

Государственная гимназия № 1549 г. Москвы

Исследовательский проект на тему

Правильные паркеты

Автор: *Мацкявичюс Роман*
(6^{б} класс)

Научные руководители:
Алфимова Анастасия Сергеевна, учитель математики
Мацкявичюс Дмитрий Александрович, учитель информатики

Москва
2009

Содержание

Введение

Тема построения правильных паркетов, в частности, была поднята в 1970 году академиком А.Н.Колмогоровым на страницах журнала «Квант»[3], где неоднократно освещалась и позднее[1,4].

Статьи в этом журнале рассчитаны на тех, у кого уже есть математическая подготовка, поэтому написаны несколько поверхностно. Некоторых доказательств и рассуждений просто нет и понять, как получаются формулы и рассчитывается результат непросто. Несмотря на это, изучение темы вполне доступно для учеников 5–6 классов. Очень важным показалось то, что в этих статьях нет пояснений основных понятий, способов выведения некоторых формул и пропущена часть рассуждения. Источник, который дал идею для этого исследования,[9] вообще содержит только рисунки паркетов без какого-либо разумного описания. Совсем ничего не удалось найти о составлении многоугольников с числом сторон более 12, даже в учебнике[7].

Из-за этого очень трудно было понять найденные статьи, и мы решили подробно во всем разобраться.

Объект исследования: правильные многоугольники и паркеты, построенные на их основе.

Предмет исследования: вычисление углов правильных многоугольников; способы их построения и закономерности укладывания на поверхности, расчет возможности их укладки в виде правильных паркетов.

Цель: дать подробное и математически обоснованное решение задачи построения правильных паркетов.

Задачи исследования

- Сформулировать все определения, так или иначе используемые при решении данной задачи.
- Научиться строить на бумаге правильные многоугольники.
- Обосновать невозможность составления правильного паркета из многоугольников с числом сторон более 12.
- Разъяснить литературные данные для облегчения решения нашей задачи.
- Освоить работу с программным обеспечением: Microsoft Word, Microsoft Excel, MathType, ChemWindow.
- Показать преимущество математического подхода к решению задачи по сравнению с подбором.
- Подготовить компьютерную презентацию результатов работы.

Практическая значимость работы

Углубленное изучение некоторых тем курса математики, не входящих в программу обучения, возможность использования при укладке мозаики, плитки, мозаичного паркета, применение компьютерных технологий для проведения расчетов и оформления результатов.

План исследования

1. Изучить имеющуюся по теме литературу.
2. Дать определения понятиям, используемым при решении задачи.
3. Научиться вычислять угловые величины в правильных многоугольниках.
4. Освоить построение правильных многоугольников на бумаге.
5. Выяснить логические и математические закономерности укладки правильных паркетов.
6. Оформить результаты.
7. Подготовить презентацию по теме.

Основная часть

1. Основные определения

Для того чтобы обсуждать что-либо, необходимо дать четкие определения понятий, используемых в процессе этого обсуждения. Поскольку нашей темой являются паркеты, давайте начнем именно с них.

Паркетом называется такое заполнение плоскости многоугольниками, при котором любые два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо не имеют общих точек.[3]

Правильный многоугольник – выпуклый многоугольник, у которого все стороны и углы одинаковы. Простейшие примеры правильных многоугольников – равносторонний треугольник и квадрат.[3]

Многоугольник является *выпуклым*, если он располагается по одну сторону от прямой, проведенной через любую его сторону. Либо все точки отрезка, соединяющего любые две точки многоугольника, принадлежат этому многоугольнику. Либо любой его внутренний угол не превышает 180°.[2]

«Паркет называется *правильным*, когда его можно наложить на самого себя так, что любая заданная его вершина наложится на любую другую заданную его вершину».[3] Правда, не совсем понятно?

Это означает (рис. 1), что если мы возьмем два одинаковых экземпляра паркета, выберем на каждом из них по одной произвольной вершине (*а*), совместим их и начнем поворачивать (*б*), то после поворота на некоторый угол все вершины и все стороны многоугольников совпадут (*в*).

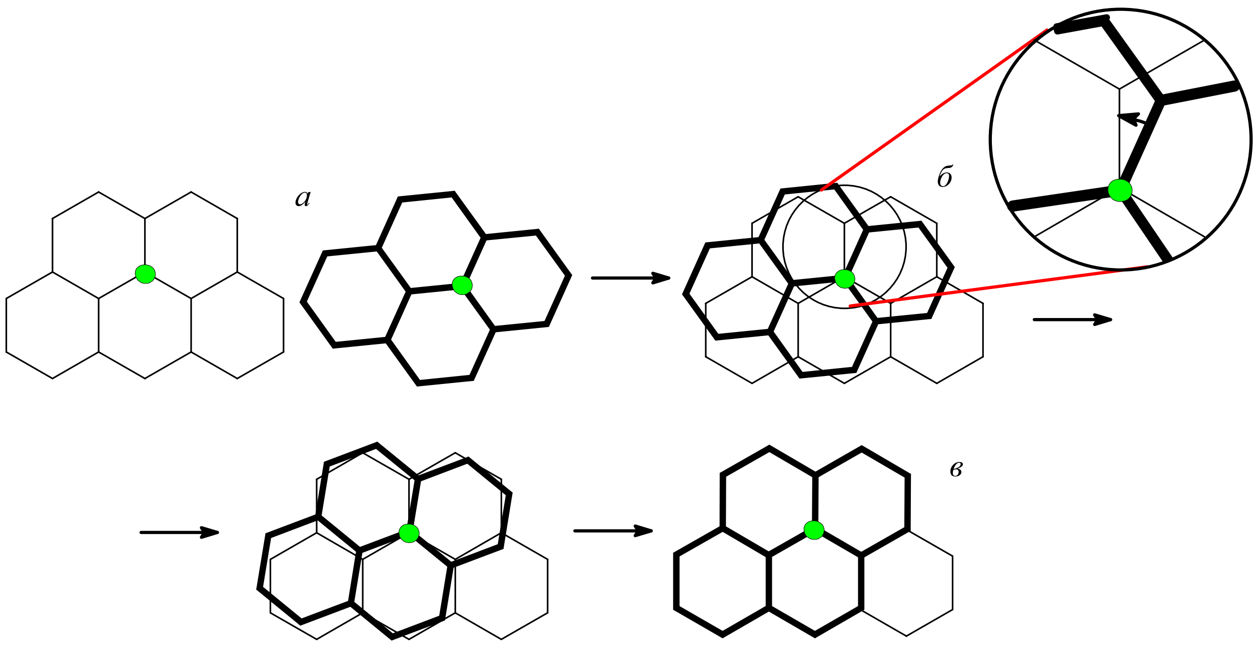


Рис. 1. Совмещение правильных паркетов.
(Зеленой точкой здесь и далее показана выбираемая вершина или вершина звезды.)

Для того, чтобы убрать некоторые неточности, воспользуемся определением из учебника. Паркет называется *правильным*, если он состоит из правильных многоугольников и вокруг каждой вершины правильные многоугольники расположены одним и тем же способом.[7]

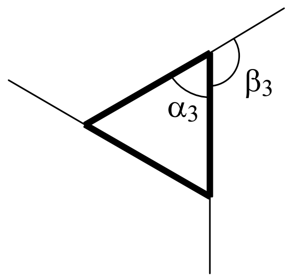


Рис. 2. Внешние и внутренние углы многоугольника.

Звездой вершины паркета называют фигуру, образуемую всеми многоугольниками, содержащими эту вершину.[4] В данной работе пометка вершины зеленой точкой показывает имеющуюся или потенциальную звезду.

Внутренний угол многоугольника образуется между двумя его соседними сторонами.[6] На рисунке 2 это угол α_3*.

Внешним углом многоугольника при данной вершине называется угол, смежный† с углом многоугольника при этой вершине.[6] На рисунке 2 это будет угол β_3.

2. Построение правильных многоугольников

Для изучения многих математических тем требуется построение фигур. Давайте изучим, как можно нарисовать некоторые правильные многоугольники.‡

Прежде чем приступать к этому, нам потребуется следующее утверждение:

> *Вокруг правильного многоугольника может быть построена описанная окружность, то есть окружность, на которой лежат все вершины многоугольника.*[2]

Значит верно и обратное: на окружности можно построить (вписать в нее) правильный многоугольник. Для этого нужно циркулем начертить окружность (для ясности ее центр обозначен точкой *O*) и продолжить построения, описанные ниже для отдельных фигур (рис. 3).

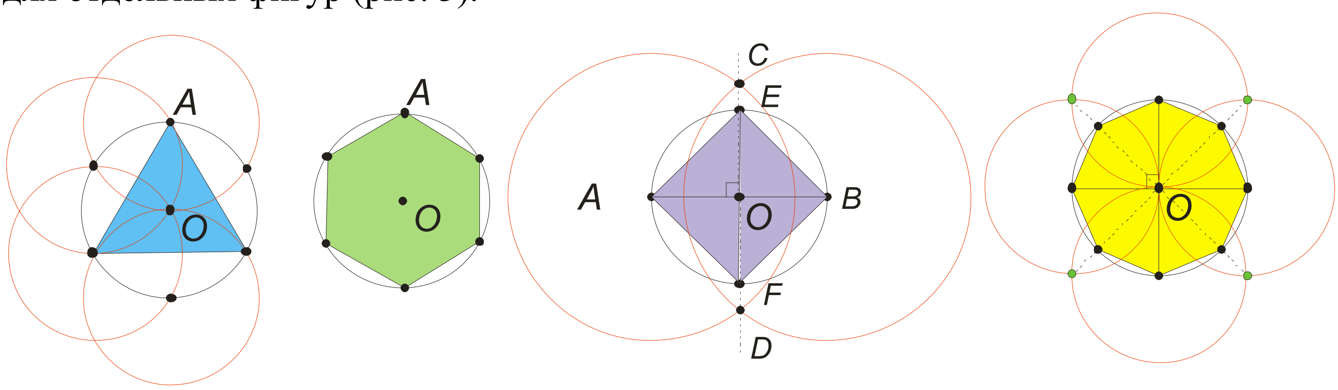


Рис. 3. Построение правильных многоугольников.

---

* Здесь и далее, внутренние углы обозначаются греческой буквой α (альфа). Нижний индекс у буквы означает число углов обсуждаемого многоугольника.

† Два угла называются смежными, если у них одна сторона общая, а другие стороны этих углов являются дополнительными полупрямыми.[6]

‡ Способы построения взяты из литературы.[5,6,7]

Треугольник и шестиугольник

Начертить окружность, выбрать на ней произвольную точку *A* и, не меняя раствора циркуля, отметить им на окружности еще пять точек. (Полностью окружности показаны для ясности. Можно просто отметить точку на первой окружности.) Соединив их попарно отрезками через одну, получим равносторонний треугольник, а соединив подряд – **шестиугольник.**

Квадрат

Проведем два взаимно перпендикулярных диаметра. Для этого можно построить две окружности с центрами на концах диаметра *AB* и радиусом *r*, бóльшим, чем радиус уже построенной окружности, но меньшим, чем ее диаметр. Точки *C* и *D* в местах пересечения окружностей равноудалены (на *r*) от *A* и *B*. Прямая, проходящая через них, перпендикулярна отрезку *AB* и проходит через его середину* (показана пунктиром). Найдем точки *E* и *F* на пересечении начальной окружности и пунктирной линии. Полученные четыре точки соединим.

Восьмиугольник

Построив точки для черчения квадрата, с помощью циркуля найдем точки, удаленные на равные расстояния от вершин квадрата (см. *квадрат*). Причем, чем дальше они будут находиться, тем точнее будет построение. Соединим противолежащие точки (показано пунктиром) и отметим места пересечения ими окружностей. Соединим восемь полученных точек.

Пятиугольник

Построение правильного пятиугольника несколько более сложное. Приведем два способа (рис. 4).†

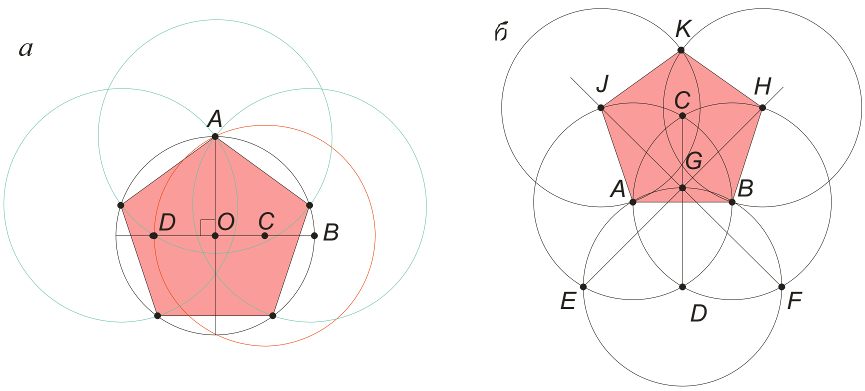


Рис. 4. Построение правильного пятиугольника.
Способы Евклида (*а*) и Дюрера (*б*).

На окружности обозначим два перпендикулярных диаметра (как для квадрата), найдем середину отрезка *OB* и проведем окружность с радиусом *CA* (красного цвета). Таким образом, найдем точку *D* на пересечении с диаметром. Далее построим окружность с радиусом *AD* (зеленого цвета), которая даст нам две точки

---

* Теорема: точки, равноудаленные от двух данных точек, есть прямая, перпендикулярная к отрезку, соединяющему эти точки, и проходящая через его середину.

† Далее в этом разделе слово «правильный» будем в основном опускать.

на пересечении с начальной окружностью. Отложим циркулем, не меняя раствора, две другие точки и соединим их все. Данный способ описан еще Евклидом в его «Началах» (около 300 г. до н.э.).

Другой способ имеет некоторое преимущество, так как на протяжении всего процесса построения не меняется раствор циркуля, что повышает точность.

Построим две одинаковых окружности так, чтобы каждая из них проходила через центр другой. Центры A и B соединим (первая сторона пятиугольника). Соединим точки пересечения окружностей C и D. Проведем окружность с центром в точке D и обозначим точки ее пересечения с первыми окружностями через E и F, а точку пересечения с CD – G. Теперь проведем прямые через E и G и через F и G до пересечения с линиями окружностей. Эти точки обозначим H и J.

Соединив J с A и H с B, получим три стороны пятиугольника. Дав возможность двум сторонам такой длины достигнуть совпадения в точке K из точек J и H, получим пятиугольник.

Многоугольник с любым числом сторон

Один из методов, позволяющий приблизительно построить правильный вписанный в окружность многоугольник с любым числом сторон известен как прием Биона (рис. 5).

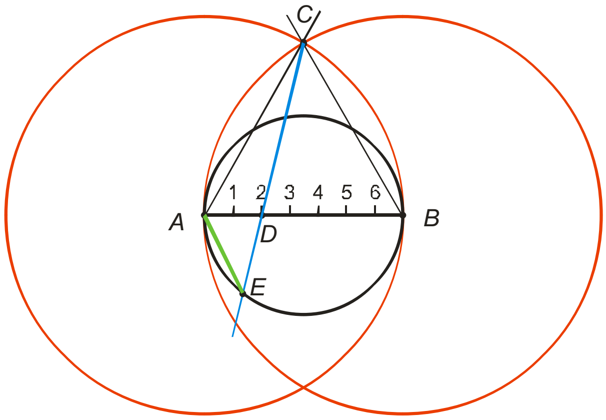


Рис. 5. Построение стороны правильного семиугольника.

Пусть дана окружность и AB – ее диаметр. Построим правильный треугольник ABC и разделим AB, точкой D в отношении $AD : AB = 2 : n$*. Пусть продолжение CD пересечёт окружность в точке E. Тогда AE представляет сторону правильного вписанного n-угольника (показана зеленым). При $n = 5, 7, 9, 10$ погрешность построения не превышает 1%. С возрастанием n погрешность растет, но остается меньше 10,3%.

Надо заметить, что при любых случаях построения четноугольника, циркулем можно отмечать только половину точек с одной стороны. Вторая половина будет находиться на противоположной стороне диаметра, что легко отметить, положив линейку на диаметр описанной окружности.

---

* Здесь и далее переменная n обозначает количество углов многоугольника.

3. Расчет углов правильного многоугольника

Поскольку многоугольник может иметь только целое число углов, его можно обозначить как n-угольник, где $n = \{3, 4, 5...\}$.

Известно, что сумма углов треугольника равна 180°, а у правильного многоугольника углы равны. Отсюда следует, что внутренний угол равностороннего треугольника равен 60°. У квадрата, как у прямоугольника, внутренние углы равны 90°. Также, мы легко можем вычислить это значение для шестиугольника по известному всем виду пчелиных сот. В одной вершине сходятся три фигуры, образуя полный круг (360°). Результаты сведены в таблице 1.

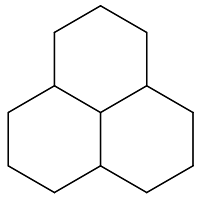


Таблица 1. Расчет внутренних углов в n-угольнике

n	α_n, °	$\sum\alpha_n = \alpha_n \cdot n$, °	$\beta_n = 180 - \alpha$, °	$\sum\beta_n = \beta_n \cdot n$, °
3	60	180	120	360
4	90	360	90	360
6	120	720	60	360

Путем поиска закономерности в ряду известных нам внутренних углов была выведена формула $\alpha = \frac{180° \cdot (n-2)}{n}$, что заняло довольно много времени. При ее упрощении была получена новая формула:

$$\alpha = \frac{180 \cdot (n-2)}{n} = \frac{180n - 360}{n} = \frac{180n}{n} - \frac{360}{n} = 180 - \frac{360}{n} = 180 - \frac{180 \cdot 2}{n} = 180 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right).$$

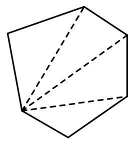
Попробуем вывести эту формулу не подбором, а путем математических рассуждений.

Мы выявили (табл. 1), что сумма внешних углов многоугольника $\sum\beta_n = \beta_n \cdot n = 360°$. Тогда $\beta_n = \frac{360}{n}$. Вместе с тем, из рисунка 2 видно, что внутренний угол n-угольника $\alpha_n = 180 - \beta_n$. Подставив сюда значение β_n, получим:

$$\alpha_n = 180 - \beta_n = 180 - \frac{360}{n} = 180 - \frac{180 \cdot 2}{n} = 180 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right). \qquad (1)$$

Еще проще провести рассуждения с помощью теоремы о сумме углов многоугольника.

Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника
$\alpha_n = 180° \cdot (n-2)$.[2]

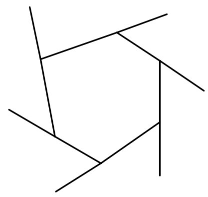


Доказательство теоремы очень простое. Если провести все диагонали из одной вершины, то фигура будет разбита на несколько треугольников. Их количество будет на два меньше числа вершин многоугольника. А сумма углов треугольника равна 180°. Теорема доказана.

Так как у правильного многоугольника все углы одинаковые, можно записать:

$$\alpha_n = \frac{180\cdot(n-2)}{n} = \frac{180n-360}{n} = 180 - \frac{360}{n} = 180\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right).$$

Таким образом мы вновь получили уравнение (1).



Взяв тот же многоугольник и построив его внешние углы, мы обнаружим, что, последовательно прибавляя следующий угол, будет пройден полный круг в 360°.

То же самое можно рассчитать математически:

$$\sum\beta_n = \beta_n\cdot n = (180 - \alpha_n)\cdot n = 180n - 180°\cdot(n-2) = 360°.$$

Получив уравнение (1), мы можем произвести вычисление внутреннего угла для любого n-угольника. Для этого, конечно, можно воспользоваться бумагой и ручкой или калькулятором, но мы применим существенно более эффективный расчет с использование программы калькуляции электронных таблиц Excel.

Для этого введем в первую колонку (A) значения n, а во вторую (B) – формулу для расчета внутреннего угла соответствующего n-угольника. Для треугольника она будет иметь вид: «=180*(1-2/A2)».

Как и всякая формула в Excel, она начинается со знака равенства. Далее полностью воспроизводится уравнение (1) за одним исключением: вместо n у нас стоит «A2». Это – ссылка на ячейку, стоящую в первой колонке (A) и во второй строке. Во второй – потому, что первая занята заголовком колонок.

Значительное достоинство Excel для подобных вычислений заключается в том, что формулу нужно набрать только один раз, а затем скопировать и вставить в те ячейки, где должны быть произведены соответствующие вычисления. Программа сама заменит ссылки на ячейки: на A3 для квадрата или на C6 для двенадцатиугольника, практически давая ссылку на значение ячейки, находящейся слева от той, где вставлена формула.

Вся работа заняла несколько минут, что невозможно при использовании любого другого способа. Результаты представлены в таблице 2.

Таблица 2. Внутренние углы n-угольников, рассчитанные в Excel

	A	B	C	D
1	n	α, °	n	α, °
2	3	60	8	135
3	4	90	9	140
4	5	108	10	144
5	6	120	11	147.2727
6	7	128.5714	12	150

Из таблицы хорошо видно, что внутренний угол у семи- и одиннадцатиугольника представляет собой бесконечную десятичную дробь {128,57(142857) и 147,(27), соответственно}, в связи с чем их нельзя использовать для укладки паркета.

4. Число фигур, участвующих в построении

Обозначим через m количество фигур, которые могут участвовать в построении звезды вершины, и попробуем выяснить его возможные значения.

Достаточно легко понять, что внутренний угол правильного многоугольника не может достигать величины 180°. В этом случае его стороны будут лежать на одной прямой, равно как и все последующие стороны. Если рассмотреть это с точки зрения формулы (1), то n должно быть равно 2, а двухугольников не существует. Таким образом, $m_{\min} = 3$. Если же разделить угол 360° на 60° (наименьший угол из всех возможных для правильных многоугольников), то мы получим $m_{\max} = 6$, что соответствует шести треугольникам.

Следовательно, $M = \{3, 4, 5, 6\}$.

5. Использование многоугольников с $n > 12$

В доступной литературе такие многоугольники практически не обсуждаются. Таких фигур бесконечное множество. А почему они не могут быть использованы для построения правильного паркета?

Для того чтобы составить два n-угольника с достаточно большими значениями n с каким-либо многоугольником, внутренний угол последнего должен быть меньше 60°, так как в обсуждаемом случае сумма двух углов превысит 300° (каждый больше, чем у двенадцатиугольника). Такое составление невозможно. Таким образом, в построении может участвовать только одна подобная фигура и две – с меньшими внутренними углами. Чтобы уложить эту фигуру с другими, она должна иметь целочисленный внутренний угол.

Немного преобразовав формулу (1):

$$\alpha_n = 180\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right) = 180\cdot\left(\frac{n}{n}-\frac{2}{n}\right) = 180\cdot\frac{n-2}{n} = \frac{180\cdot(n-2)}{n}, \qquad (2^*)$$

мы легко можем определить, что целочисленный внутренний угол (α_n) может получиться только при n кратном 180 или n кратном произведению $180\cdot(n-2)$. В последнем случае множитель $(n-2)$ может сокращаться с n, только если n – четное число, то есть давать дополнительный множитель 2.

Разложим число 180 на простые множители: $180 = 2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5$. Отсюда, количество делителей числа 180 будет 18:

$X_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180\}$

Добавив еще один множитель (названную выше двойку), получим множество X_2, состоящее из 24 чисел: $X_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360\}$.

Поскольку единица и двойка не имеют смысла, а рассмотрение этого множества до 12 фактически приведено ранее, обратимся к остальным числам. Таких чисел 14, и этот расчет может отнять много времени. А нельзя ли его сократить или хотя бы упростить?

---

* Такая же формула была случайно получена при поиске закономерности изменения внутреннего угла в правильном многоугольнике.

Как уже сказано, внутренний угол во всех случаях будет превышать 150°. Оставшаяся величина (β + 180°) меньше 210° и не может быть получена:

- добавлением такого же многоугольника или большего (их сумма превысит 300° и не найдется третей фигуры для дополнения);
- добавлением более 3 фигур (даже 60°·4 = 240°);
- если сумма внутренних углов добавляемых фигур не превышает 180°.

Такими вариантами могли бы быть (что несложно сделать перебором):

- $\alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_3 = 60 + 60 + 60 = 180°$;
- $\alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_4 = 60 + 60 + 90 = 210°$;
- $\alpha_3 + \alpha_5 = 60 + 108 = 168°$;
- $\alpha_3 + \alpha_6 = 60 + 120 = 180°$;
- $\alpha_3 + \alpha_8 = 60 + 135 =$ *195*°;
- $\alpha_3 + \alpha_9 = 60 + 140 =$ *200*°;
- $\alpha_3 + \alpha_{10} = 60 + 144 =$ *204*°;
- $\alpha_3 + \alpha_{12} = 60 + 150 = 210°$;
- $\alpha_4 + \alpha_4 = 90 + 90 = 180°$;
- $\alpha_4 + \alpha_5 = 90 + 108 =$ *198*°;
- $\alpha_4 + \alpha_6 = 90 + 120 = 210°$;
- $\alpha_5 + \alpha_5 = 108 + 108 = 216°$;
- $\alpha_6 + \alpha_4 = 120 + 90 = 210°$;
- $\alpha_8 + \alpha_4 = 135 + 90 = 225°$.

Хорошо видно, что приводить все варианты нет смысла, так как значение начинает превышать заданную в условии величину (<210°). Красным курсивом выделены углы, удовлетворяющие всем условиям. Это – 195, 198, 200 и 204 градуса. Остаются для предполагаемого внутреннего угла *n*-угольника значения в 165, 162, 160, 156 градусов.

Преобразуем уравнение (2) для вычисления числа углов с учетом разложения числа 180 на простые множители.

$$\alpha_n = \frac{180\cdot(n-2)}{n} \ (2);\ n = \frac{180\cdot(n-2)}{\alpha_n} = \frac{2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot(n-2)}{\alpha_n}. \qquad (3)$$

Значение *n* может быть целым числом только когда значение α_n полностью (до единицы) сокращается с числителем.

Разложим на простые множители имеющиеся у нас предполагаемые углы, выделив красным курсивом множители, сокращаемые с множителями числа 180:

165 = *3*·*5*·11 (остаток 11);
162 = *2*·*3*·*3*·3·3 (остаток 3·3 = 9);
160 = *2*·*2*·2·2·2·*5* (остаток 2·2·2 = 8);
156 = *2*·*2*·*3*·13 (остаток 13).

В данном случае *n* – 2 должно превышать 10 (так как *n* соответствует больше, чем 12 углам) и быть кратно остатку, не сокращаясь с ним полностью. То есть задача сводится к простым арифметическим действиям.

165 = 3·5·11 (остаток 11), $n - 2 = 22$, $n = 24$,
162 = 2·3·3·3·3 (остаток 9), $n - 2 = 18$, $n = 20$,
160 = 2·2·2·2·2·5 (остаток 8), $n - 2 = 16$, $n = 18$,
156 = 2·2·3·13 (остаток 13), $n - 2 = 13$, $n = 15$.

Таким образом, потенциально возможны паркеты с формулами:

- $\alpha_3 + \alpha_8 + \alpha_{24} = 60° + 135° + 165°$;
- $\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_{20} = 90° + 108° + 162°$;
- $\alpha_3 + \alpha_9 + \alpha_{18} = 60° + 140° + 160°$;
- $\alpha_3 + \alpha_{10} + \alpha_{15} = 60° + 144° + 156°$;

Следует подчеркнуть, что все эти расчеты могут быть полностью проведены устно. Попытка сделать вычисления вручную по формуле (1) заняла бы очень много времени и совершенно не могла бы гарантировать безошибочности. Даже привлечение Excel для расчетов всех углов не позволило бы легко найти полученные значения.

Прежде чем попытаться производить построения, обратимся к литературе. В статье[4] О.Михайлова приведена следующая лемма*: «*В вершине правильного паркета не могут сходиться три различных многоугольника, у одного из которых нечетное число сторон*».

К сожалению, при ее доказательстве на рисунке допущена небольшая неточность. Давайте приведем это доказательство (от противного), исправив ее.

Если предположить, что такое построение возможно (рис. 6), то, начав поочередно достраивать к нечетноугольнику *m*- и *n*-угольники от помеченной вершины по часовой стрелке, мы придем к тому, что в исходной точке окажутся два *m*-угольника. (Пара «*m*- + *n*-угольник» может повторяться любое число раз.) Таким образом, эта вершина будет составлена не тремя фигурами, а двумя одинаковыми и нечетноугольником, что автоматически исключает правильный паркет.

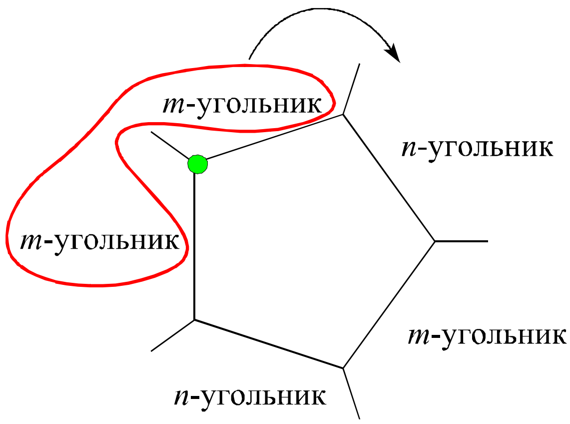


Рис. 6. Построение паркета вокруг нечетноугольника

К сожалению, построение указанных выше паркетов как правильных невозможно в соответствии с изложенным доказательством.

Расчет в Excel уже описанным способом, подтверждает наши умозаключения о целочисленных значениях углов, что отображено в таблице 3.

---

* Лемма – утверждение, имеющее вспомогательное значение и полезное не само по себе, а для доказательства других утверждений.

Таблица 3. Расчет предсказанных целочисленных углов *n*-угольников

n	α, °	*n*	α, °	*n*	α, °	*n*	α, °
15	156	30	168	60	174	180	178
18	160	36	170	72	175	360	179
20	162	40	171	90	176		
24	165	45	172	120	177		

В самом деле, если продолжить экспериментировать и увеличивать в Excel значение *n*, то мы получим целочисленные углы только в тех случаях, которые были описаны.

6. Составление паркетов путем подбора

Из предыдущих рассуждений и практических соображений, мы легко можем составить три правильных паркета: из треугольников, квадратов и шестиугольников (рис. 7–9).

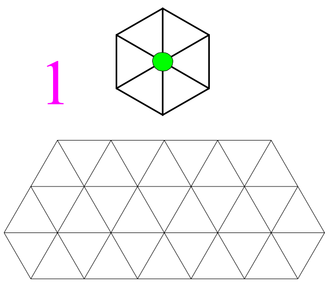


Рис. 7. $6 \cdot \alpha_3$.

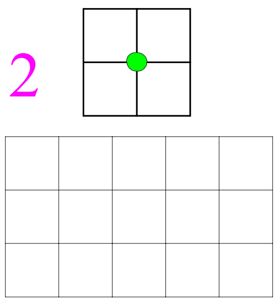


Рис. 8. $4 \cdot \alpha_4$.

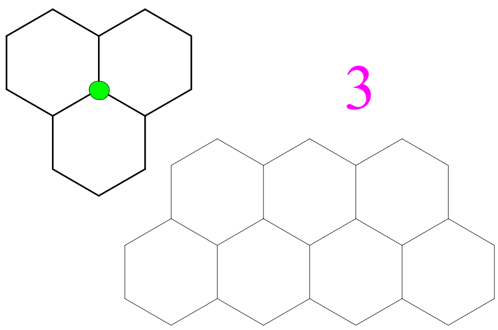


Рис. 9. $3 \cdot \alpha_6$.

Изучив рисунки 8 и 9, легко заметить закономерность, заключающуюся в том, что в многоугольниках с четным числом сторон все противолежащие стороны параллельны. Сразу возникает желание попытаться сложить вместе восьми-, десяти- и двенадцатиугольник. В первом случае это удается сделать легко. И действительно, два угла по 135° оставляют нам 90°, в которые прекрасно вписывается квадрат (рис. 10). Каждая звезда построена тремя вершинами (два восьмиугольника и квадрат), так что мы получили четвертый правильный паркет.

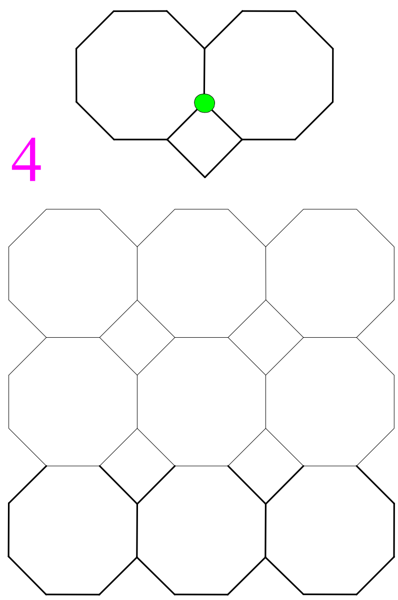


Рис. 10. $\alpha_4 + 2 \cdot \alpha_8$.

Много хуже обстоят дела с десятиугольником. Если прибегнуть к предварительным расчетам, то такой ошибки можно избежать: 144° + 144° оставляют нам только 72°, а правильной фигуры с таким внутренним углом нет.

Чтобы четко наглядно представить полную картину укладывания вместе одинаковых фигур, вновь обратимся к Excel, дополнив имеющиеся вычисления (табл. 4).

Таблица 4. Расчет оставшихся углов (в град) для некоторых *n*-угольников.

n	α	Остаток от 1 фигуры	Остаток от 2 фигур	Остаток от 3 фигур	Остаток от 4 фигур
3	60	300	240	180	120
4	90	270	180	90	0
5	108	252	144	36	
6	120	240	120	0	
8	135	225	90		
9	140	220	80		
10	144	216	72		
12	150	210	60		

Расчеты проведены простым вычитанием: $360 - m_n\alpha_n$, где m_n – число взятых *n*-угольников (1, 2, 3 и 4).

Из табличных вычислений, мы можем намного быстрее проанализировать, можно ли к углу, остающемуся от сложения одинаковых фигур добавить еще что-нибудь.

В таблице нередко встречаются повторяющиеся значения. Проведем оценку, какими фигурами они могут быть заполнены, выписав их по порядку от максимального до минимального (табл. 5).

Таблица 5. Возможные решения при построении паркетов

Угол, °	Источник	Возможные дополнения	Итоговые формулы
300	α_3	$5\cdot\alpha_3$, $\alpha_6 + 3\cdot\alpha_3$, $2\cdot\alpha_{12}$	$6\cdot\alpha_3$ $4\cdot\alpha_3 + \alpha_6$ $\alpha_3 + 2\cdot\alpha_{12}$
270	α_4	$3\cdot\alpha_4$, $\alpha_4 + 3\cdot\alpha_3$.	$4\cdot\alpha_4$ $3\cdot\alpha_3 + 2\cdot\alpha_4$
252	α_5	$\alpha_5 + \alpha_{10}$	$2\cdot\alpha_5 + \alpha_{10}$
240	α_6, $2\cdot\alpha_3$	$2\cdot\alpha_6$, $\alpha_{12} + \alpha_4$, $4\cdot\alpha_3$, $2\cdot\alpha_4 + \alpha_3$	$3\cdot\alpha_6$ $\alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_{12}$ $4\cdot\alpha_3 + \alpha_6$ $\alpha_3 + 2\cdot\alpha_4 + \alpha_6$ $2\cdot\alpha_3 + 2\cdot\alpha_6$ $2\cdot\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_{12}$ $6\cdot\alpha_3$ $3\cdot\alpha_3 + 2\cdot\alpha_4$
225	α_8	$\alpha_8 + \alpha_4$	$\alpha_4 + 2\cdot\alpha_8$
220	α_9	—	—
216	α_{10}	—	—
210	α_{12}	$\alpha_{12} + \alpha_3$	$\alpha_3 + 2\cdot\alpha_{12}$
180	$3\cdot\alpha_3$, $2\cdot\alpha_4$	$2\cdot\alpha_4$, $3\cdot\alpha_3$, $\alpha_3 + \alpha_6$.	$3\cdot\alpha_3 + 2\cdot\alpha_4$ $6\cdot\alpha_3$ $4\cdot\alpha_3 + \alpha_6$ $4\cdot\alpha_4$ $6\cdot\alpha_3$ $4\cdot\alpha_3 + \alpha_6$
144	$2\cdot\alpha_5$	α_{10}	$2\cdot\alpha_5 + \alpha_{10}$
120	$4\cdot\alpha_3$, $2\cdot\alpha_6$	α_6, $2\cdot\alpha_3$	$6\cdot\alpha_3$ $4\cdot\alpha_3 + \alpha_6$ $2\cdot\alpha_3 + 2\cdot\alpha_6$ $3\cdot\alpha_6$
90	$2\cdot\alpha_8$, $3\cdot\alpha_4$	α_4	$4\cdot\alpha_4$ $\alpha_4 + 2\cdot\alpha_8$
80	$2\cdot\alpha_9$	—	—
72	$2\cdot\alpha_{10}$	—	—
60	$2\cdot\alpha_{12}$	α_3.	$\alpha_3 + 2\cdot\alpha_{12}$
36	$3\cdot\alpha_5$	—	—

Данный перебор занимает очень много времени. Вместе с тем он дает нам все возможные варианты построения паркетов, хотя получается множество повторов ($6\cdot\alpha_3$, $3\cdot\alpha_6$, $4\cdot\alpha_3 + \alpha_{12}$, $4\cdot\alpha_4$, $2\cdot\alpha_5 + \alpha_{10}$...).

Избавление от повторяющихся значений в данном случае представляет собой довольно сложную работу. Вместе с тем, она может быть сделана очень быстро и с максимальной точностью средствами MS Word в котором и происходит набор текста. Надо отметить, что для этого колонка «Итоговые формулы» должна быть набрана с жестким соблюдением двух правил: многоугольники вставляются в порядке увеличения числа сторон и каждая формула размещена либо в отдельной ячейке, либо в отдельном абзаце. После этого колонка выделяется (Shift+правая кнопка мыши), копируется и вставляется в пустом абзаце. Курсор устанавливается в полученной таблице и выполняется команда меню «Table–Convert–Table to Text». Преобразованный фрагмент автоматически выделяется, поэтому можно сразу выполнить команду меню «Table–Sort...». Таким образом, получается отсортированный по абзацам текст, в котором все повторяющиеся формулы идут подряд, и обнаружить их очень легко. Итак, мы получили список возможных формул для 12 паркетов:

1	$2·\alpha_3 + 2·\alpha_6$	7	$4·\alpha_4$
2	$2·\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_{12}$	8	$6·\alpha_3$
3	$2·\alpha_5 + \alpha_{10}$	9	$\alpha_3 + 2·\alpha_{12}$
4	$3·\alpha_3 + 2·\alpha_4$	10	$\alpha_3 + 2·\alpha_4 + \alpha_6$
5	$3·\alpha_6$	11	$\alpha_4 + 2·\alpha_8$
6	$4·\alpha_3 + \alpha_6$	12	$\alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_{12}$

Четыре из них (помечены фоном) мы уже построили (рис. 7–10). Продолжим анализ и построение.

Формула $2·\alpha_3 + 2·\alpha_6$ позволяет уложить фигуры двумя способами (рис. 11), но в одном из них получаются две совершенно разных вершины (*б*), в связи с чем может быть построен только один правильный паркет (*а*).

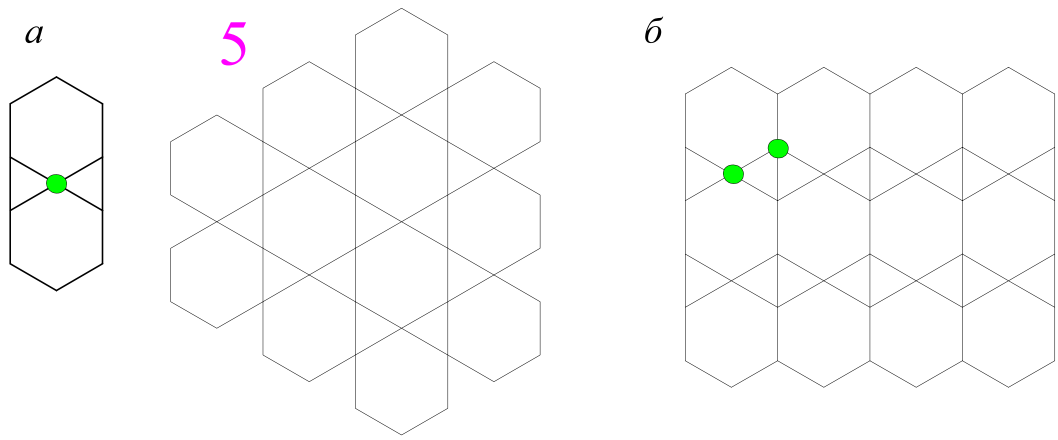


Рис. 11. $2·\alpha_3 + 2·\alpha_6$.

Для случая $2·\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_{12}$ (рис. 12) построение и вовсе невозможно.

Точно такая же ситуация возникает для $2·\alpha_5 + \alpha_{10}$ (рис. 13). Это соответствует лемме о невозможности укладки трех многоугольников, хотя бы один из которых нечетный (стр. 13). Кроме того, при укладывании очередного пятиугольника (показан красным) получится угол $\gamma = 36°$.

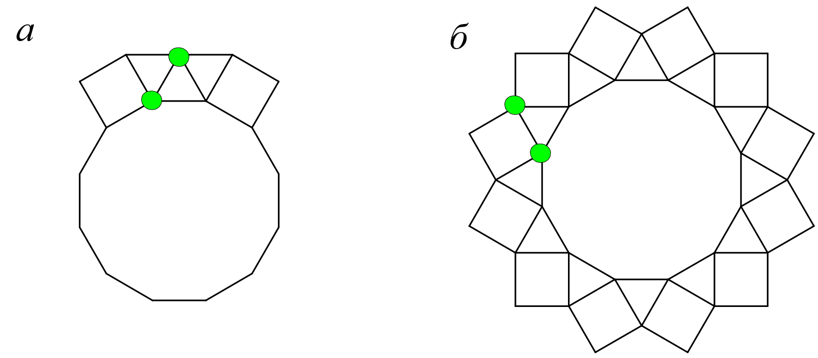


Рис. 12. $2{\cdot}\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_{12}$.

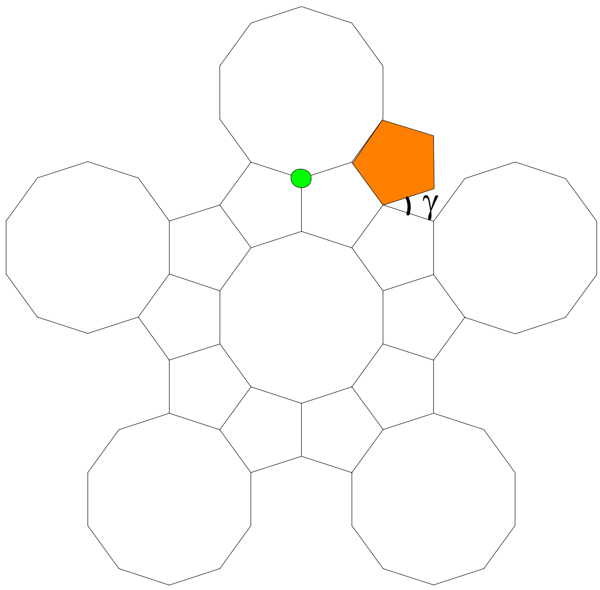


Рис. 13. $2{\cdot}\alpha_5 + \alpha_{10}$.

Зато формула $3{\cdot}\alpha_3 + 2{\cdot}\alpha_4$ позволяет построить целых два правильных паркета (рис. 14).

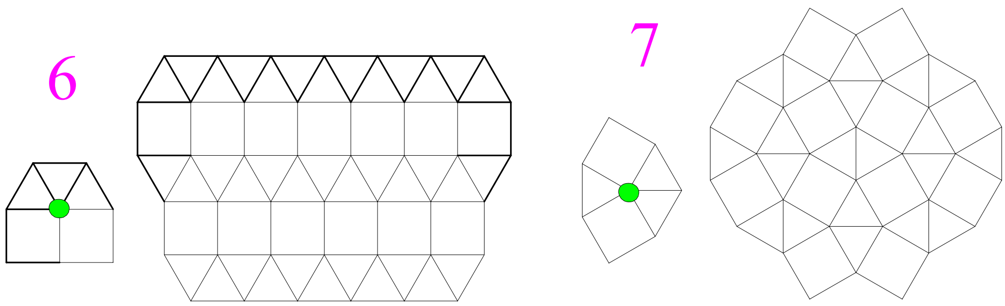


Рис. 14. $3{\cdot}\alpha_3 + 2{\cdot}\alpha_4$.

Удается уложить и паркеты по формулам $4{\cdot}\alpha_3 + \alpha_6$ (рис. 15) и $\alpha_3 + 2{\cdot}\alpha_4 + \alpha_6$ (рис. 16).

В случае же $\alpha_3 + 2{\cdot}\alpha_{12}$ удается построить правильный паркет, показанный на рис. 17*а* и неправильный, но часто используемый на практике (рис. 17*б*).

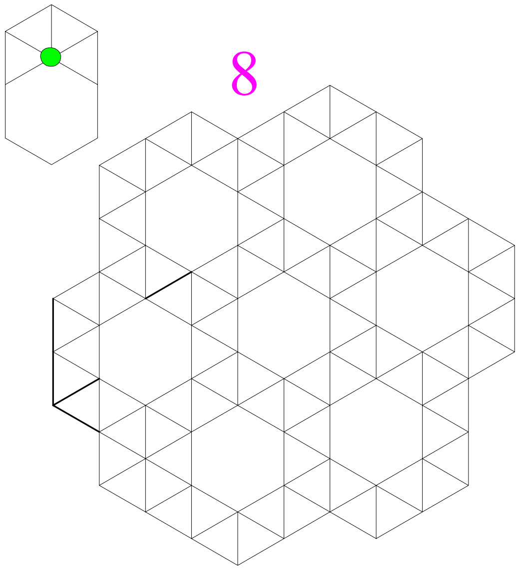


Рис. 15. $4\cdot\alpha_3 + \alpha_6$.

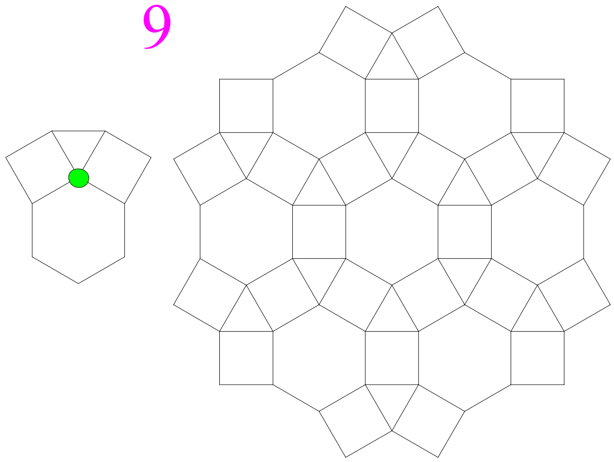


Рис. 16. $\alpha_3 + 2\cdot\alpha_4 + \alpha_6$.

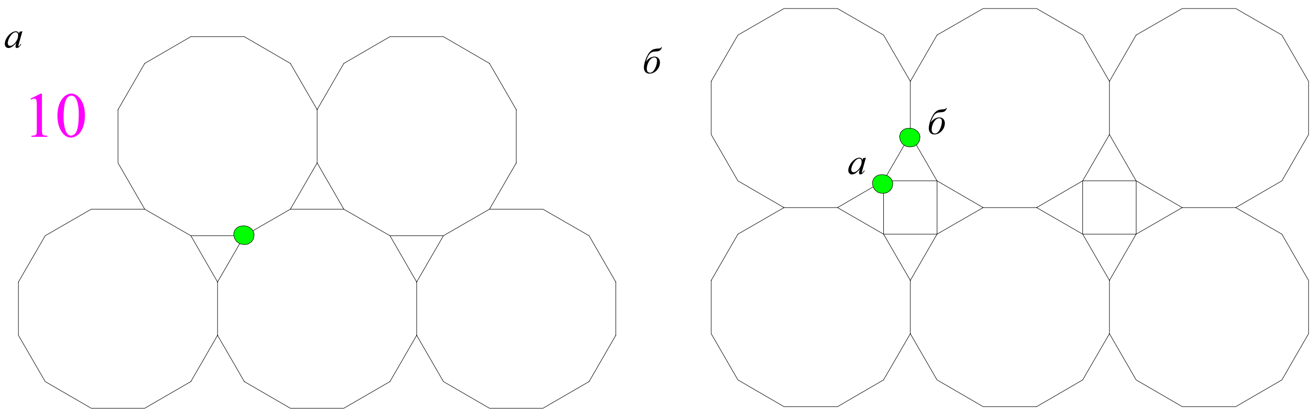


Рис. 17. $\alpha_3 + 2\cdot\alpha_{12}$.

И, наконец, на рисунке 18 показан последний из возможных паркетов с формулой $\alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_{12}$.

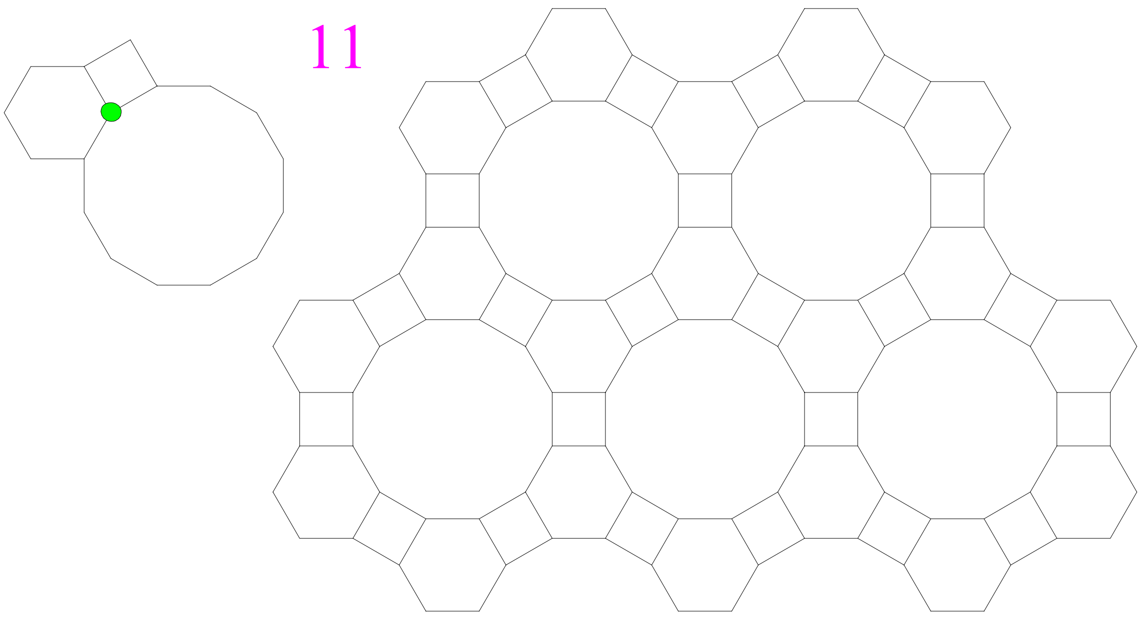


Рис. 18. $\alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_{12}$.

7. Некоторые особенности сложения дробей

При решении данной работы придется столкнуться с уравнениями типа

$\sum \frac{1}{n_i} = a$, то есть $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + ... \frac{1}{n_i} = a$, где a – известное нам число.

Когда начинается изучение действий с дробями, такие вычисления могут показаться сложными. На самом деле, эти уравнения имеют мало целочисленных корней, найти которые не очень трудно.

Основной закономерностью будет то, что получение единицы при сложении нескольких таких дробей возможно при их равенстве, когда в знаменателях стоит одинаковое число, равное количеству складываемых дробей:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1; \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1...$$

Либо сумма части дробей дает одну долю единицы, а сумма другой части – остальную:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1.$$

С другой стороны, наблюдается закономерность, когда увеличение одного из знаменателей ведет к уменьшению другого. Это связано с тем, что число, деленное на большее число, дает меньший результат, который должен быть возмещен другой дробью. А такая компенсация для числителя, равного единице, может быть получена далеко не всегда.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1; \quad \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1.$$

Если принять, что переменные $n_1 \geq n_2 \geq ... \geq n_i$ (расставить их в порядке возрастания), то, наиболее простой вариант, когда они равны между собой и равны числу складываемых дробей дает много ограничений для изменения значения. Так, последний знаменатель может быть только уменьшен (а он и так наименьший). Если его увеличивать, то в оставшейся части какие-нибудь знаменатели должны быть уменьшены, а это противоречит условию.

Для уравнений, где нам понадобятся такие вычисления, добавятся еще условие подстановки только определенных чисел из-за того, что количество углов должно быть не менее трех и т.д.

Некоторые из приведенных подходов (только для четырех неизвестных) обсуждены в статье[1]. В частности, там даны 14 возможных решений, из которых для нашей задачи подходят только четыре, так как в остальных случаях одно из чисел – двойка.

8. Составление паркетов путем вычислений

Несмотря на то, что в предыдущих разделах была проделана большая вычислительная работа, большинство решения заключалась в подборе, не требующем четкого доказательства. Этот раздел будет посвящен строго математическому способу. В его основу частично легли рассуждения из литературы[4], которые были дополнены и подробно разъяснены.

Из уже обсужденных результатов, нам полностью потребуются разделы 1–3.

Выведем уравнение для расчета углов, образующих вершину паркета:

$$\sum m_i \alpha_i = 360°. \tag{4}$$

То есть сумма произведений числа одинаковых многоугольников на их внутренние углы должна составлять 360°. Иначе не получится сложить их вместе.

Подставив в него значение угла из уравнения (1), получим

$$\sum m_i \cdot 180° \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) = 360°. \tag{5}$$

В геометрии принято обозначать прямой угол переменной d, что дает вариант

$$\sum m_i \cdot 2d \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) = 4d,$$

хотя в нашем случае это не играет большой роли и несколько усложняет понимание. В любом случае с левой стороны равенства есть общий множитель 180° ($2d$), который можно выделить и справа (180°·2). Сократив уравнение на эту величину, мы получим окончательный вариант, который и будем использовать в дальнейших расчетах:

$$\sum m_i \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) = 2. \tag{6}$$

8.1. Паркеты из трех многоугольников

В данном случае возможны три ситуации:

1) все многоугольники одинаковые;
2) два одинаковых и один – другой;
3) все многоугольники разные.

<u>Для первого случая</u> уравнение принимает простейший вид, так как сумма будет составляться тремя одинаковыми фигурами:

$$3 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) = 3 - \frac{6}{n} = 2 \tag{7}$$

и имеет единственный корень $n = 6$ (рис. 9, паркет **3**).

<u>Для двух одинаковых и одного другого многоугольника</u> получим:

$$2 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + 1 \cdot \left(1 - \frac{2}{p}\right) = 2$$

или

$$2 - \frac{4}{n} + 1 - \frac{2}{p} = 3 - \frac{4}{n} - \frac{2}{p} = 2;\ 1 - \frac{2}{p} = \frac{4}{n};\ \frac{p}{p} - \frac{2}{p} = \frac{p-2}{p} = \frac{4}{n};\ n = \frac{4p}{p-2}. \tag{8}$$

В данном уравнении целочисленные n могут быть получены только при четных значениях p (только тогда будет происходить сокращение знаменателя с четверкой числителя) или при $p = 3$ (в знаменателе будет единица).

p	3	4	6	8	10
n	12	8	6	$\frac{16}{3}$	5
Рис.	17	10	9	—	13
Паркет	**10**	**4**	**3**	—	—

Как видно, ошибка произошла только в одном случае, который можно было предсказать: 8 – 2 = 6 (2·3).

Разбор бóльших значений p не имеет смысла, так как все последующие четные числа либо имеют нечетный делитель, либо больше, чем три двойки при разложении на простые множители. Таким образом, всегда будет получаться дробь.

Точнее то же самое можно показать, выделив из уравнения (8) целую часть:

$$n = \frac{4p}{p-2} = \frac{4(p-2)+8}{p-2} = \frac{4(p-2)}{p-2} + \frac{8}{p-2} = 4 + \frac{8}{p-2},$$

из чего следует, что при $p > 10$, знаменатель всегда будет больше числителя. Следовательно, в этом случае n никогда не будет целым числом.

<u>В случае с тремя разными многоугольниками</u>, уравнение примет вид:

$$1-\frac{2}{n}+1-\frac{2}{p}+1-\frac{2}{q}=2;\quad \frac{2}{n}+\frac{2}{p}+\frac{2}{q}=1;\quad \frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2} \tag{9}$$

За счет леммы, изложенной на стр. 13, мы можем утверждать, что все переменные величины в нашем последнем уравнении должны быть четными. Тогда, заменив их соответственно на новые переменные $2n_1$, $2p_1$, $2q_1$ (удвоенные половинные значения), получим:

$$\frac{1}{2n_1}+\frac{1}{2p_1}+\frac{1}{2q_1}=\frac{1}{2};\quad \frac{1}{n_1}+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=1. \tag{10}$$

Предположим, что $n_1 > p_1 > q_1$. Тогда

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}<\frac{3}{q_1}.$$

В этом случае q_1 не может быть больше 2, а $q = 4$.

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{2}=1;\quad \frac{1}{n_1}+\frac{1}{p_1}=\frac{1}{2}. \tag{11}$$

Другой вариант доказательства, не использованный в литературе, но более простой и легко получаемый на основе раздела 7 данной работы. Примем все знаменатели равными трем, что уже нарушит условие разных многоугольников. Чтобы его исправить, мы можем только уменьшить q_1, но оно не может быть равно 1 (двухугольник). Останется только случай, когда $q_1 = 2$.

Далее, если $n_1 > p_1$, то $p_1 = 3$, а $n_1 = 6$. $\left(\frac{1}{n_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}.\right)$ Попытка исследовать бóльшие значения p_1 приведет к тому, что n_1 должна стать больше p_1, что противоречит условию.

Следовательно, мы получили новый паркет $\alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_{12}$ (рис. 18, паркет **10**).

8.2. Паркеты из четырех многоугольников

В общем виде уравнение имеет вид:

$$1 - \frac{2}{n} + 1 - \frac{2}{p} + 1 - \frac{2}{q} + 1 - \frac{2}{r} = 2; \quad \frac{2}{n} + \frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} = 2; \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1. \qquad (12)$$

В качестве первичной предпосылки предположим, что $n \geq p \geq q \geq r$, откуда следует, что $r \leq 4$, так как иначе следующие знаменатели должны стать меньше r, чтобы в сумме могла получится единица. Если предположить, что $n = p = q = r$ (решение напрашивается само), то корнем уравнения будет 4 (четыре четверти) (рис. 8, паркет **2**).

В другом случае $r = 3$,

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{3} = 1; \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{3}. \qquad (13)$$

В этом уравнении $q < 5$, так как даже $\frac{3}{5} < \frac{2}{3}$.

Если $q = 3$, то на две оставшиеся дроби приходится $\frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}; \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

что имеет два решения, когда $n = p = 6$ (рис. 11, паркет **5**) или $n = 12$, $p = 4$ (рис. 12, паркета нет).

Если $q = 4$, есть единственное решение: $n = 6$, $p = 4$ (рис. 16, паркет **9**).

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}; \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

8.3. Паркеты из пяти многоугольников

Уравнение:

$$1 - \frac{2}{n} + 1 - \frac{2}{p} + 1 - \frac{2}{q} + 1 - \frac{2}{r} + 1 - \frac{2}{s} = 2;$$

$$\frac{2}{n} + \frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} + \frac{2}{s} = 3; \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{3}{2}. \qquad (14)$$

Предположим, что $n \geq p \geq q \geq r \geq s$. Для решения при таком результате дроби, необходимо принять, что $q = r = s = 3$. Тогда мы получим

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{2}; \quad \frac{1}{n}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}.$$

Это уравнение мы уже решали (11) при $p = 3$, а $n = 6$ (рис. 15, паркет **8**). А если $p = n = 4$, то получатся еще два варианта (рис. 14, паркет **6** и **7**) .

8.4. Паркеты из шести многоугольников

Наиболее простой из всех случаев, так как 360°/6 = 60° дает нам только сочетание шести треугольников (рис. 7, паркет **1**). Другие варианты не имеют смысла, так как внутренний угол треугольника – самый маленький.

9. Расчет по долям круга

В связи с тем, что набор многоугольников, формирующих звезду вершины, образует круг (360°), мы можем рассчитать долю, которую составляет от этой величины внутренний угол каждого многоугольника (табл. 6).

Таблица 6. Расчет внутренних углов в *n*-угольнике

n	α_n, °	Доля от 360°	Доля 2 от 360°	Доля 3 от 360°	Доля 4 от 360°
3	60	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$	$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$
4	90	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}=1$
5	108	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$	$\frac{9}{10}$	—
6	120	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}=1$	—
8	135	$\frac{27}{72}$	$\frac{54}{72}=\frac{3}{4}$	—	—
9	140	$\frac{7}{18}$	$\frac{14}{18}=\frac{7}{9}$	—	—
10	144	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	—	—
12	150	$\frac{5}{12}$	$\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$	—	—

За счет этого, мы избавляемся от размерности и существенно облегчаем восприятие, что связано с уменьшением числа используемых цифр.

Обозначив долю через x, мы получим простейшую расчетную формулу:

$$\sum m_i x_i = 1.$$

Но при попытке решения ее путем приведенных в разделе 6 рассуждений, мы не сможем воспользоваться никакими закономерностями. Например, для трех различных фигур получится уравнение

$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$

которое все равно придется решать подбором, а это намного проще делать, если уравнение составлено в виде суммы дробей.

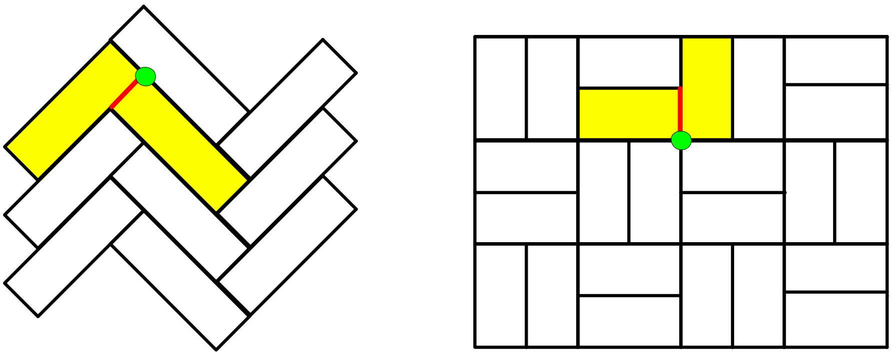
Таким образом, данный подход не позволит упростить построение правильных паркетов.

10. Дополнение к определению паркета

Во время первых попыток построения паркетов, возникла проблема понимания определения паркета. Напомним определение.

> *Паркетом* называется такое заполнение плоскости многоугольниками, при котором любые два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо не имеют общих точек.

Так, для случаев классических строительных паркетов



возникает нечеткие предположения, связанные с тем, что помеченные прямоугольники имеют общую вершину. Вместе с тем, у них еще есть общие точки, отмеченные красным цветом. Определение не позволяет понять, как оценивать такую ситуацию.

Однако, если бы это был паркет, то почти любое замощение поверхности фигурами без перекрывания было бы паркетом.

Если же дополнить определение:

> *...имеют* ***единственную общую точку*** *– вершину..*,

то станет очевидным, что эти паркеты – не математические.

Заключение

В результате проведения данного исследования было наглядно показано преимущество математического подхода к решению данной задачи перед подбором и перебором. Оно занимает намного меньше времени при полной уверенности, что все варианты найдены. Для доказательства правильности решения были применены рассуждения, отличающиеся от принятых в литературе.

Данный проект рассматривается нами как исследовательский, так как уже на этапе постановки цели и изучения литературы было найдено много не описанных сторон или не доказанных утверждений. На все эти вопросы пришлось искать собственное решение и подходы.

Вместе с тем, предложено и подробно разъяснено применение других математических методов или подходов (делимость чисел, разложение числа на простые множители, решение дробных уравнений со многими неизвестными) для сокращения количества перебираемых вариантов.

С помощью нахождения всех целочисленных корней уравнения для расчета внутреннего угла правильного многоугольника были найдены все фигуры, которыми можно было бы сложить правильный паркет из многоугольников с числом сторон более 12. Доказано, что такого паркета не может быть.

Было предложено дополнение к определению паркета.

Так как данный проект является моей первой исследовательской работой, я начал осваивать в нем научный стиль изложения. Оно очень отличается от того, как пишутся сочинения или от разговорной речи.

Освоена и закреплена исследовательская и оформительская работа с программами: Microsoft Word, Microsoft Excel, MathType, ChemWindow.

При внимательном изучении данной работы ученики, знающие основы арифметики и геометрии начальной школы, могут освоить закономерности построения и совместного укладывания правильных многоугольников и получить важнейшие навыки практической работы с угловыми величинами, дробями, черчению многоугольников; закрепить материал по теме «Делимость чисел».

Изложенный материал может быть использован на практике для укладки художественных паркетов, плитки, мозаики.

При выполнении данной работы было замечено, что при изучении в школе разложения числа на простые множители совсем не объясняется, в каком порядке и почему следует использовать признаки делимости. Поэтому, в следующей работе предполагается изучить этот вопрос и разработать оптимальный алгоритм для разложения.

Кроме того, исследование может быть продолжено для изучения закономерностей покрытия плоскости неправильными прямоугольниками, невыпуклыми многоугольниками и другими фигурами.

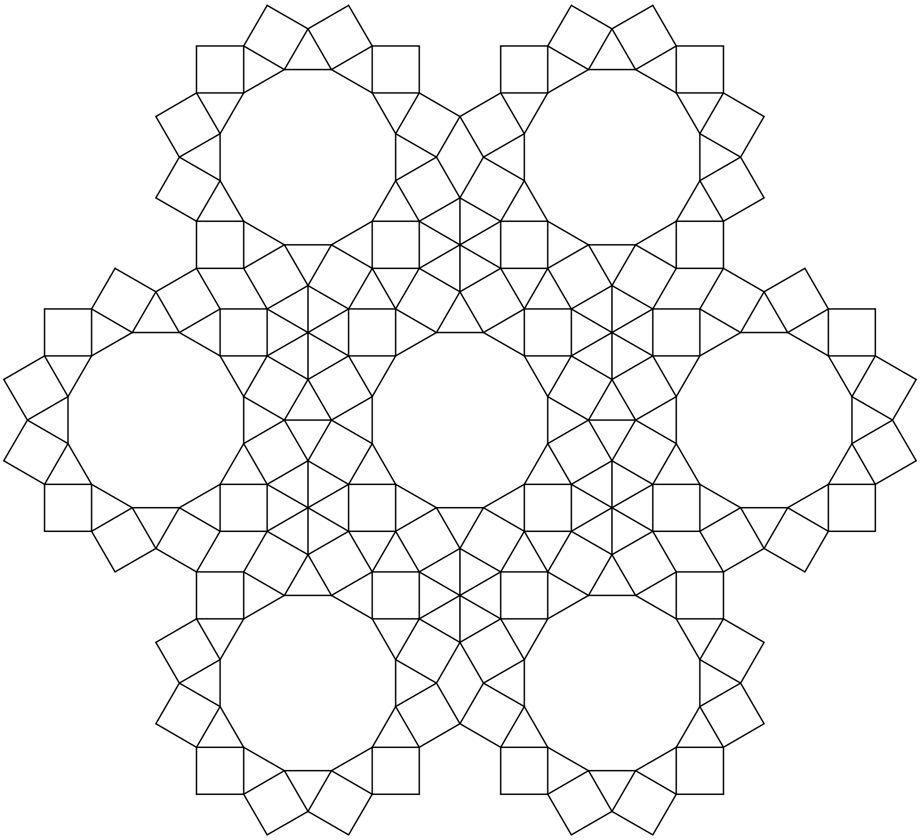
Библиография

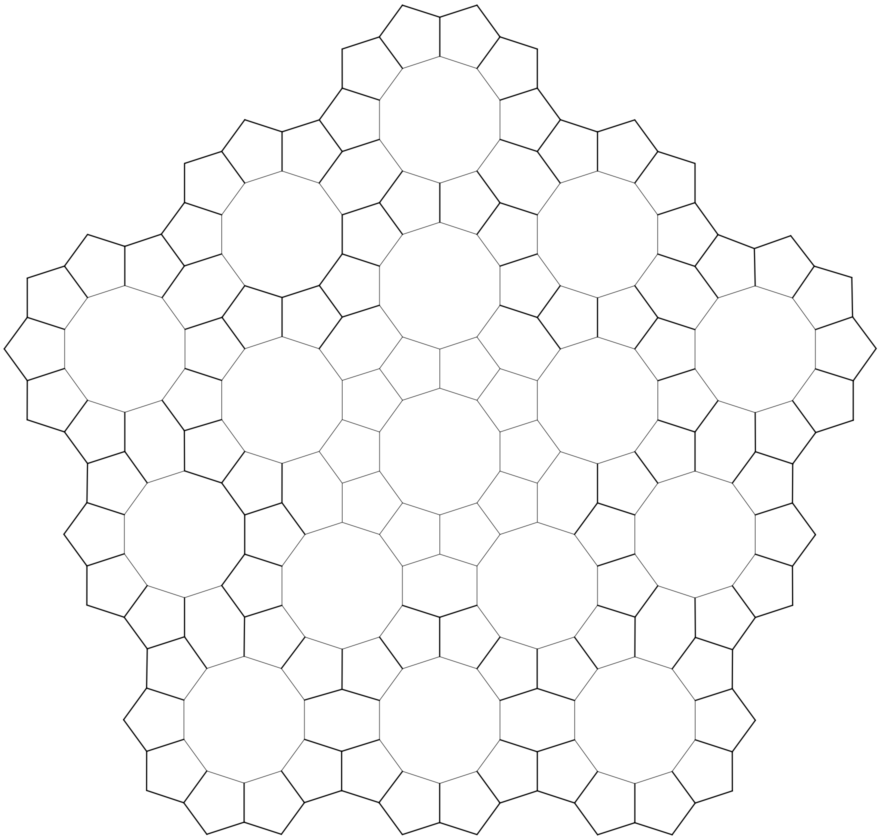
1. Гутенмахер В.Л. Дроби – верблюды – паркеты // Квант. №1, 1989, С.30.
2. Кожухов И.Б., Прокофьев А.А. Универсальный справочник по математике. – М.: 2002, 544 с.
3. Колмогоров А.Н. Паркеты из правильных многоугольников // Квант. №3, 1970, С.3.
4. Михайлов О. Одиннадцать правильных паркетов // Квант. №2, 1979, С.9.
5. О приближённых построениях правильных многоугольников http://schools.techno.ru/sch758/geometr/prib.htm.
6. Погорелов А.В. Геометрия: Учеб. для 7–9 кл. общеобразоват. учреждений. 4-е изд. – М.: Просвещение, АО «Московские учебники», 2003, 224 с.
7. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия 7–9 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений. – М.: Мнемозина, 2005, 376 с.
8. Шашкин Ю.А. Паркеты // МИФ, №3, 1998/99 (http://www.eunnet.net/mif/text/n0399/1.html).
9. Я познаю мир: Математика: энциклопедия. – М.: АСТ, 2005, С.245.
10. Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика / Глав. ред. М. Аксенова; метод. и отв. ред. В. Володин. – М.: Аванта+. 2004, 688с.: ил.

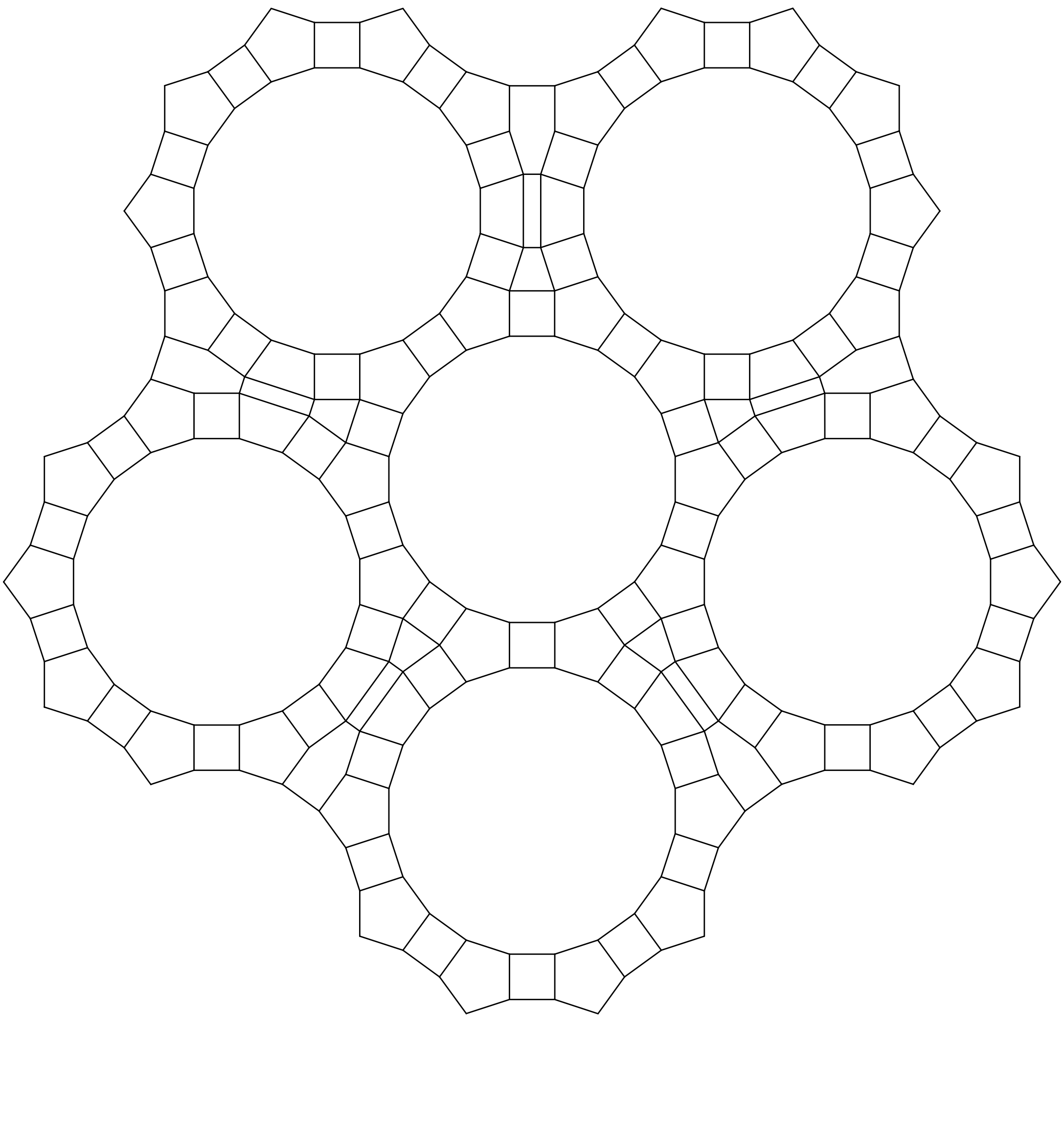
Приложения

Некоторые паркеты, содержащие неправильные многоугольники

Построения выполнены на основе расчетов, не приведших к правильным паркетам.







Указатель терминов и определений