**Обобщение формулы радиуса описанной около прямоугольного треугольника окружности на многомерный случай**

**Исследовательская работа**

**Оглавление**

Введение…………………………………………………………………………………………..3

§1. Некоторые сведения из теории……………………………………………….5

§2. Обобщение формулы радиуса описанной около

прямоугольного треугольника окружности на

многомерный случай………………………………………………………………14

Заключение……………………………………………………………………………………...19

Список литературы………………………………………………………………………….20

Приложение……………………………………………………………………………………..21

**Введение**

Треугольник можно поистине считать атомом геометрии. Изучение треугольников началось с признаков равенства, центральное место в курсе планиметрии занимают метрические свойства треугольников, затем идёт серия теорем о «замечательных точках» в треугольниках, и, наконец, в конце курса изучаются подобные треугольники. Таким образом, треугольники являются стержнем, вокруг которого формируется курс элементарной геометрии.

Это не случайно. Несмотря на то, что треугольник едва ли не простейшая после отрезка фигура, он имеет много важных и интересных свойств. К этим свойствам сводятся свойства других, более сложных фигур [5,с. 24].

**Цель исследовательской работы –** обобщить формулу радиуса описанной около прямоугольного треугольника окружности на многомерный случай.

**Объект исследования –** прямоугольный симплекс.

**Предмет исследования –** формула радиуса описанной около прямоугольного симплекса сферы.

Теорема была доказана во втором параграфе. В качестве методов доказательства данной теоремы, состоящей из двух частей, использовались: метод векторной алгебры – для первой части, метод координат – для второй.

Полученные мною в ходе работы результаты являются качественно новыми.

Данная работа представлена введением, основной частью, заключением, списком литературы и приложением. Основная часть работы состоит из двух параграфов, первый из которых содержит все определения и теоремы по данной теме, а второй – обобщение формулы радиуса описанной около прямоугольного треугольника окружности на многомерный случай. В заключении подводятся итоги работы. В приложении раскрывается практическая значимость данной работы.

**§ 1. Некоторые сведения из теории**

1. **Многомерное евклидово пространство. Прямые и плоскости.**

Нижеприведённые определения 1.1- 7.2, а также теоремы 3.1- 7.4 можно найти в [5,с. 2- 11].

**Опр.1.1.** Множество элементов произвольной природы, именуемых далееточками, называется*n –* мерным евклидовым пространством(n>0), если выполняются три требования:

1. Каждой точке М можно поставить в соответствие упорядоченный набор n чисел () причём так, что соответствие между всеми точками и всеми упорядоченными наборами ( по n чисел) было взаимно однозначным;
2. Каждой паре точек М (,…, ), М'(, ,…,) поставлено в соответствие число= - численное расстояние между точками;
3. Геометрическими считаются только такие соотношения, которые определяются расстоянием между точками, причём, эти соотношения должны сохраняться при умножении всех расстояний в них на любой положительный множитель.

**Опр. 1.2.** Если евклидово пространство расположено в евклидовом пространстве (n>k), то пространство называется плоскостью размерности k в (будем обозначать её ).

**Опр. 1.3.** Прямой в называется плоскость размерности 1 (т.е. прямая )

**Опр.1.4.** Гиперплоскостью в называется плоскость размерности

*п-1* (т. е. - гиперплоскость).

**2. Выпуклая оболочка. Сфера.**

**Опр.2.1.** Множество точек *М* в называется выпуклым, если для любых его точек *А* и *В* отрезок АВ лежит во множестве *М.*

**Теорема 2.1.** Пусть в дана некоторая геометрическая фигура *Ф* (т. е. непустое множество точек). Рассмотрим всевозможные выпуклые множества, содержащие фигуры *Ф.* Пересечение всех этих выпуклых множеств - выпуклое множество, содержащее фигуру *Ф*.

**Опр. 2.2.** Выпуклое множество, являющееся пересечением всех выпуклых множеств, содержащих данную фигуру *Ф*, называется выпуклой оболочкой фигуры *Ф*.

**Опр. 2.3.** Выпуклое множество имеет размеренность *k* в (*k≤n*), если оно содержится в некоторой плоскости и найдётся содержащийся в нём шар размеренности *k* .

**Опр. 2.4.** Сферой размерности *n-1*  радиуса *R* c центром в точке называется множество всех точек из Е, расстояние каждой из которых до равно *R.*

**Опр. 2.5.** Шаром размерности *n* радиуса *R* с центром в точке называется множество всех точек из, расстояние каждой из которых до меньше либо равно *R.*

**Замечание:** Выпуклой оболочкой сферы размерности *n-1*  является шар размеренности *n* (с тем же центром и того же радиуса).

**3. Точки общего расположения.**

**Теорема 3.1.** Через *k+1*  точку в можно провести плоскость (при  *n> k*). Такая плоскость единственная, если эта *k+1*  точка не лежит ни в какой одной плоскости .

**Опр. 3.1.** Если *k+1*  точка в евклидовом пространстве не лежит ни в какой одной плоскости , то их называют точками общего расположения.

**Следствие.** Через *k+1*  точку общего расположения в можно провести плоскость и притом только одну. В частности, через *n*  точек общего расположения в можно провести единственную гиперплоскость .

**Теорема 3.2.**  В существует  *n+1* точка общего расположения. Эти точки не лежат ни в какой одной гиперплоскости .

**Следствие.** В любой плоскости существует *k+1* точка общего расположения. Эти точки не лежат ни в какой плоскости .

Выводы о точках общего расположения:

1) Максимально возможное количество точек общего расположения, существующих в евклидовом пространстве (в любой его плоскости) всегда на 1 больше размерности этого пространства (размерности этой плоскости).

2) Если в евклидовом пространстве задано некоторое количество точек общего расположения, то они однозначно определяют проходящую через них плоскость, размерность которой на 1 меньше количества этих точек.

3) Если в плоскости пространства дан набор точек общего расположения, то пополнив его любой точкой, не лежащей в этой плоскости (и такая точка всегда существует, поскольку *k< n*). Мы получим новый набор точек общего расположения в (это стандартный способ увеличения на 1 количества точек общего расположения).

4) Любая часть точек общего расположения сама образует набор точек общего расположения.

**4. Симплекс, его грани, рёбра, вершины.**

**Опр. 4.1.** Симплексом размеренности *k* с вершинами в точках , ,…, , в называется выпуклая оболочка точек , ,…, , , если эти точки общего расположения (обозначим симплекс через его вершины: , ,…, , , а иногда ещё короче: – симплекс размерности *k*).

**Замечание:** В любой плоскости существуют симплексы (а также симплексы всех меньших размерностей), но не может существовать симплекса большей, чем *k*  размерности. В частности, в пространстве существуют симплексы всех меньших размерностей.

**Опр.4.2.** Пусть дан симплекс , ,…, , . Рассмотрим какую – нибудь часть его вершин. Если их количество равно  *m+1*, то симплекс с вершинами в этих точках называют гранью размерности  *m (m<k)*.

**Опр.4.3.** Пусть дан симплекс , ,…, , (k – его размерность). Выделим какую - нибудь одну его вершину. Остальные *k* вершин определяют его грань размерности  *k – 1* . Эта грань симплекса называется противолежащей выделенной вершине (а вершина – противолежащей этой грани).

**Опр.4.4.** Рёбрами симплекса называют грани размерности 1 (они являются всевозможными отрезками, соединяющими вершины симплекса).

**Замечание:** Гранями размерности 2 любого симплекса являются всевозможные треугольники с вершинами в вершинах симплекса . Гранями размерности 3 симплекса являются всевозможные тетраэдры с вершинами в вершинах симплекса (полагаем здесь, *n*>3).

**Опр.4.5.** Границей симплекса в пространстве называется объединение всех его граней размерности *n – 1* (а они содержат и грани всех меньших размерностей, как, например, грани тетраэдра содержат все его рёбра и вершины).

**Опр.4.6.** Внутренними точками симплекса называются все его точки, не принадлежащие границе.

**Опр.4.7.** Симплекс называется правильным, если все его рёбра равны.

**Опр.4.8.** Симплекс называется прямоугольным, если все его рёбра, исходящие из некоторой его вершины, попарно перпендикулярны. Эту вершину называют вершиной прямых углов.

**5. Центроид. Медианы симплекса.**

**Опр.5.1.** Центроидом данных в называется такая точка *М,*  сумма всех векторов с общим началом в точке *М* ис концами в данных точках, равна нулевому вектору:  *=*

**Теорема 5.1.** Существует единственный центроид любого конечного числа точек евклидова пространства.

**Опр.5.2.** Центроидом симплекса называется центроид всех его вершин.

**Опр.5.3.** Медианой симплекса, проведённой из данной его вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с центроидом противолежащей грани.

**Теорема 5.2.** Все медианы симплекса , ,…, (*n-* его размерность) пересекаются в одной точке – центроиде симплекса и делятся ею в отношении *n*:1, считая от вершины.

**Замечание.** Из каждой вершины симплекса можно провести медиану. Поэтому речь идёт о *n+1* медиане.

**Теорема 5.3.** Если *М* – центроид точек , то для любой точки *О*  выполняется векторное равенство , где

1 ≤ *i* ≤ *р.*

**6. Перпендикуляр плоскости. Гиперсфера.**

**Опр.6.1.** Прямая называется перпендикулярной плоскости в если она перпендикулярна любой прямой этой плоскости.

**Теорема 6.1.** Пусть даны некоторая плоскость (любой размерности) в и некоторая точка вне плоскости. Среди всех отрезков, соединяющих данную точку с точками плоскости, существует единственный перпендикулярный ей, причём он является кратчайшим среди этих отрезков (т.е. имеет наименьшую длину).

**Опр.6.2.** Отрезок, соединяющий данную точку с точкой данной плоскости и перпендикулярный ей, называется перпендикуляром из данной точки

на данную плоскость, его длина - расстоянием от точки до плоскости, его конец на плоскости – основанием перпендикуляра.

**Теорема 6.2.** (признак перпендикулярности прямой и плоскости). Прямая перпендикулярна плоскости в , если она перпендикулярна пересекающимся в одной точке прямым , … , (количество прямых равно *k* – размерности плоскости), где , , … , - (*k+1*) точка общего расположения в этой плоскости.

**Опр.6.3.**  Гиперсферой радиуса *R*  с центром в точке называется множество всех точек из , расстояние каждой из которых до равно *R*  (радиусом называют и отрезок, соединяющий центр с точкой гиперсферы, и его длину).

В случае, когда гиперсфера описанная будем называть её проще – сфера.

**Опр.6.4.** Сфера размерности *n – 1*  описанной около симплекса , если она проходит через все его вершины.

**7. Некоторые свойства симплексов.**

**Опр.7.1.** Высотой симплекса, проведённой из данной его вершины к противолежащей грани, называется перпендикуляр из этой вершины на плоскость, определяемую противолежащей гранью.

**Теорема 7.1.** В центре описанной сферы симплекса пересекаются перпендикуляры, восстановленные к гиперплоскостям всех его граней наибольшей размерности в центрах описанных около этих граней сфер.

**Опр.7.2.** Симплекс, все высоты которого пересекаются в одной точке, называется ортоцентрическим, а точка пересечения его высот – ортоцентром.

**Теорема 7.2.** Симплекс размерности *n>2*  является ортоцентрическим тогда и только тогда, когда любые два его ребра, не исходящие из одной вершины

перпендикулярны.

**Теорема 7.3.** Всякая грань (размерности *n>1*) ортоцентрического симплекса сама является ортоцентрическим симплексом. Основание высоты ортоцентрического симплекса – ортоцентр грани, к которому проведена высота.

**Теорема 7.4.** Прямоугольный симплекс – ортоцентрический. Правильный симплекс – ортоцентрический.

**8. Прямая Эйлера.**

**Опр.8.1.** Пусть *О* – центр описанной вокруг треугольника *АВС* окружности *S*. Высоты треугольника *АВС*  пересекаются в одной точке *Н,* причём точки *Н, О*  и точка пересечения медиан *М* лежат на одной прямой и *НМ : МО* = 2.

Прямая *НМО* называется прямой Эйлера треугольника *АВС*

[13, с. 58].

Лемму 8.1. можно найти в [10, с. 4].

**Лемма 8.1.** Центр *О*  описанной сферы ортоцентрического симплекса

, ,…, и его центр *Н*  удовлетворяют векторному равенству:

= , где *n* – размерность симплекса, *n* ≥ 2, *n N* .

**Теорема 8.1.** Центр *О*  описанной сферы ортоцентрического симплекса

, ,…, , его центроид *М*  и ортоцентр  *Н* лежат на одной прямой (прямой Эйлера), причём выполняется векторное равенство:

= , где *n* – размерность симплекса, *n* ≥ 2, *n N* .

**9. Некоторые сведения из планиметрии.**

Нижеприведённые определения 9.1, 9.2. содержатся в .

1. Скалярное произведение векторов.

**Опр. 9.1.** Скалярным произведением двух векторов называется произведение из длин на косинус между ними.

· = ·· cos

Если , то по формуле получаем · = · . В частности,

· = ².

**Опр.9.2.** Скалярное произведение · называется скалярным квадратом вектора и обозначается .

**Следствие 9.2.** Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

2. Правило треугольника для сложения векторов.

**Теорема 9.1.** Каковы бы ни были точки  *A, D, C,*  имеет место векторное равенство  *AD + DC = AC* .

Эта теорема даёт следующий способ построения суммы произвольных векторов и . Надо от конца вектора отложить вектор , равный вектору .

Тогда вектор, начало которого совпадёт с началом вектора , а конец – с концом вектора , будет суммой векторов и . Такой способ сложения двух векторов называется «правилом треугольника» [4, с. 240 - 241].

3. Координаты середины отрезка.

Пусть в системе координат *А (* ; ) и *В ()*  - две произвольные точки и *С (x ; y) –* середина отрезка  *АВ.* Формулы, связывающие координаты точки *С*  с координатами точек *А* и *В* , выглядит так:

*x = , y =*  4, с. 223].

**10. Комбинаторика.**

**Опр.10.1.** Сочетанием из *n*  элементов по *m (m ≤ n)*  называется *m* -

элементарное подмножество *n* – элементного множества.

Формула для вычисления:

*=*  ,

где - число сочетаний из *n*  элементов по *m* [2, с. 47].

**§ 2. Обобщение формулы для радиуса описанной около прямоугольного треугольника окружности на многомерный случай.**

**Теорема.** Пусть *Н … -* прямоугольный симплекс размерности *n , Н –* вершина прямых углов. Тогда радиус описанной около прямоугольного симплекса сферы определяется равенством:

*R =,*

где - катеты данного симплекса, причём *Н* = Н =

Н = Н = Н= .

Доказательство.

**I.** Рассмотрим прямоугольный симплекс *Н …* размерности *n ,*  у которого *, Н –* вершина прямых углов , – катеты, причём *Н* = Н = Н = Н = Н= . Докажем, что

*R =*.

Обозначим через точку *О* – центр описанной около сферы. Так как - прямоугольный, то по теореме 7.4. он – ортоцентрический, тогда по определению 7.2. *Н* – ортоцентр. По опр. 6.3. расстояние от *Н* до *О*  будет равно

R, то есть нужно вывести формулу для расстояния между двумя «замечательными точками» (*Н* – ортоцентр, *О –* центр описанной сферы): *НО = R,*

где R – радиус описанной сферы.

А по лемме 8.1 = , где *n* – размерность симплекса,

*n* ≥ 2, *n N.*

=

*(n – 1) = + + + … + +*  +

***n***  *= + + + … + +*

*(n – 2) = + + + … + +*

Возведём это векторное равенство в квадрат:

*(n – 2) ² = ² + ² + ² + … + ² + ² +*

*2(· + · + … + · + · + · + · +*

*+ · + + … + + + … + ·).*

Ясно, что = = = … = = = = *R.*  По правилу треугольника для сложения векторов, т.е. по теореме 9.1, выполняется равенство

= - . Возведём его в квадрат, получим

² = ² + ² - 2· .

По следствию 9.2: ² = ² = *R.*

Отсюда найдём

· = (2 *R² -* ²). Аналогично,

· = (2 *R² - ²), … , =*  (2 *R² - ²),*

*· =*  (2 *R² - ²), =*  (2 *R² - ²),*

*=*  (2 *R² - ²), =*  (2 *R² - ²),*

*· =*  (2 *R² - ²) , … , · =*  (2 *R² - ²),*

*· =*  (2 *R² - ²), … , · =*  (2 *R² - ²).*

Итак вычисляем

*(n – 2)² R² =*

*n R² + 2(* (2 *R² -* ²) + (2 *R² - ²) + … +*  (2 *R² - ²)+*

*+*  (2 *R² - ²) +*  (2 *R² - ²) + … +*  (2 *R² - ²) +*  (2 *R² - ²) +*

*+*2 *R² - ² … +*  (2 *R² - ²) +*  (2 *R² - ²) + … +*  (2 *R² - ²))*

*(n² - 4n +4) R² - n R² =* 2 *R² - ²+* 2 *R² - ² + … +* 2 *R² - ² +*

*+*2 *R² - ² +* 2 *R² - ² + … +* 2 *R² - ² +* 2 *R² - ² +* 2 *R² - ²+*

*+ … +* 2 *R² - ² +* 2 *R² - ² + … +*2 *R² - ². (2)*

Далее вычислим количество *R²,* находящихся в правой части последнего равенства. Для этого по формуле опр. 10.1. вычислим количество слагаемых, находящихся в скобках правой части равенства (1). Оно будет равно числу сочетаний из *n* элементов по 2:

= = =

Так как каждое из слагаемых представлено в виде разности, в каждой из которых уменьшаемым является 2 *R².* То получим, что количество *R²* в правой части равенства (2) будет равно 2· , т.е. *n(n – 1) .*

Таким образом,

*n² R² - 4n R² + 4 R² - n R² =*

*= n(n – 1) R² -( ² + ² + … + ² + ² + ² + … + ² +*

*+ ² + ² + … + ² + ² + … + ²),*

*n² R² - 4n R² + 4 R² - n R² - n² R² + n R² =*

*= - ( ²+ ² + … + ² + ² + ² + … + ² + ² +*

*+ ² + … + ² + ² + ²),*

*-4 (n – 1) R²=*

*= - ( ²+ ² + … + ² + ² + ² + … + ² + ² +*

*+ ² + … + ² + ² + ²),*

*R²= = ( ²+… +² + … + ² + … + ² + …+ ²).*

**II.** Для доказательства этой части теоремы воспользуемся методом координат.

Этот метод предполагает следующие этапы.

1. К симплексу «пристраивается» ПДСК: за начало координат следует принять

вершину прямых углов, а оси координат направить по рёбрам симплекса.

2. Находят координаты вершин симплекса через его катеты: каждая вершина симплекса будет иметь на более одной ненулевой координаты. Причём эта координата – длина одного из катетов [6, с. 20].

Следовательно , точка имеет координаты ; 0; 0, … ; 0), - координаты

(0; ; 0; … ; 0), (0; 0; ; … ; 0), (0; 0; 0, ; … ; 0), … , (0; 0; … ; ; 0),

(0; 0; 0; … ; ). Тогда по формуле опр. 1.1. вычисляем:

= = ,

= = ,

= = ,

= = ,

= = ,

= = ,

= = ,

= = ,

*= =*

*,*

*= = ,*

= .

Итак,

*R²= (²+*

*+ ),*

*R =*

*R = .*

Теорема доказана.

**Заключение**

В данной работе ставилась цель – сформулировать и доказать теорему, обобщающую формулу для радиуса описанной около прямоугольного треугольника окружности на многомерный случай. В качестве методов доказательства данной теоремы, состоящей из двух частей, использовались: метод векторной алгебры – для первой части, метод координат – для второй. Как оказалось, наибольшую трудность представляло доказательство именно первой части теоремы. В работе представлен необходимый понятийный аппарат, используемый при доказательстве. Данная теорема была доказана.

Как видим, многомерные фигуры можно изучать и познавать, так же как и двумерные, трёхмерные. Человек стремится узнать новое и неизвестное ради простого любопытства. Но как показывает история человеческой цивилизации, знания, полученные человеком, в конечном итоге находят практическое применение. Наступит время, когда многомерные фигуры будут изучать не только ради любопытства. Закономерности о многомерных фигурах будут воплощены при создании инструментов и систем, функционирующих по законам многомерного мира. Знания о многомерных фигурах понадобятся для конструирования теорий и моделей явлений материального мира и могут стать тем ориентиром, который укажет перспективные пути в новые промышленные и информационные технологии [8, с.4].

**Список литературы**

1. Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю. Геометрия: Учебное пособие для вузов по спец. «Математика». – М.: Наука, 1990. – 672с.

2. Вводный курс математики. Издание 2-е, исправленное: Методическая разработка / Авторы – составители Ю. А. Моторинский, Б. Д. Пайсон. – Барнаул: Издательство БГПУ, 2002. – 70 с.

3. Геометрия: Учебник для 7 – 9 классов общеобразовательных учреждений / Л. С. Атанансян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – 8-е издание. – М.: Просвещение, 1986. – 335 с.

4. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика: Алгебра: Геометрия: Приложения: справ. материалы: Учебное пособие для учащихся. – М.: Просвещение, 1986. 271 с.

5. Дудкин А. А. Задачи о симплексе многомерного евклидова пространства: Рукопись. – Барнаул: Издательство БГПУ, 2003. – 34 с.

6. Котёнок А. Второй шаг в четвёртое измерение / А. Котёнок // Математика: Еженедельное прил. к газете «Первое сентября». – 2001 - № 31. – с. 4.

7. Факультативный курс по математике: Учебное пособие для 7 – 9 классов средней школы / составитель И. Л. Никольская. – М.: Просвещение, 1991. - 269с.

8. Шарыгин И. Ф. Узнайте точку / И. Шарыгин // Квант. – 1989. - № 9. – с. 52.

9. Энциклопедия элементарной математики. Книга IV. Геометрия. – М.: Физматгиз, 1966. – 567с.

**Приложение**

На внеклассных занятиях можно предложить учащимся самостоятельно доказать нижеприведённые теоремы о соотношениях между перечисленными точками. Исследовательская работа может являться источником при отыскании метода доказательства. В этом отражается её практическая значимость.

Теорема для треугольника:

Пусть *Н -* прямоугольный треугольник, *Н –* прямой . Тогда радиус (R)

описанной около прямоугольного треугольника окружности определяется равенством *R =*  , где - катеты данного прямоугольного треугольника, причём *Н, Н =*

Доказательство.

Рассмотрим прямоугольный треугольник *Н(рис. 1), Н –* прямой, - катеты данного прямоугольного треугольника, причём *Н, Н =* Докажем , что *R =*  .

По свойству прямоугольного треугольника [4, с. 198] центр описанной около прямоугольного треугольника окружности совпадает с серединой гипотенузы. Значит *ОН = О = О = R.* При доказательстве искомой формулы воспользуемся методом координат. С этой целью следует ввести прямоугольную систему координат: за начало координат следует принять вершину прямого угла ( Н ), а оси координат направить по катетам (*,* ) прямоугольного треугольника через его катеты: каждая вершина будет иметь не более одной ненулевой координаты. Причём эта координата – длина одного из катетов.

Следовательно, точки *Н* заданы координатами (0; 0), () и (0; ) соответственно. По формуле опр. 1.1 вычисляем

= = .

Так как *О* - середина , то найдём координаты точки *О:*

x = , y = (по формулам п. 9.3.), т.е.

*О* Найдём расстояние между точками *О* и *Н* через их координаты по формуле опр.1.1: = = Так как R, то R = . Теорема доказана.

После доказательства теоремы для замечательных точек треугольника можно попытаться обобщить его на случай тетраэдра. Таким образом, можно попытаться выйти в пространство.

Теорема для тетраэдра:

Пусть *Н* - прямоугольный тетраэдр, Н – вершина прямых углов. Тогда радиус (R) описанной около прямоугольного тетраэдра сферы определяется равенством R = , где катеты данного тетраэдра, причём *Н, Н = Н = .*

Доказательство.

I. Рассмотрим прямоугольный тетраэдр *Н*  (рис. 2), у которого Н –вершина прямых углов , катеты данного тетраэдра, причём *Н, Н = Н = .* Докажем, что R = .

*О –* центр описанной около данного тетраэдра сферы. По опр. 4.1. тетраэдр является симплексом размерности 3 (). Так как данный тетраэдр прямоугольный, то по теореме 7.4 он ортоцентрический, тогда по опр. 7.2.

Н – ортоцентр. И по опр. 6.3 расстояние от *Н* до *О* будет равно *R* .

А по лемме 8.1 = , где *n* – размерность симплекса,

*n* ≥ 2, *n N* .

Для симплекса :

=

= *( )*

2 =

=

Возведём последнее векторное равенство в квадрат, получим

² = + 2( + · +· ).

Ясно, что *О = О = О = ОН = R .* По правилу треугольника для сложения векторов, т.е. по теореме 9.1, выполняется равенство =

Возведём его в квадрат, получим

²= ² - 2.

По следствию 9.2 ² = ² = R.

Отсюда найдём

=

Аналогично,

=

· =

Итак, вычисляем

= 3 + 2( )

= 3 +6 –

8 =

R=

II. Для доказательства этой части теоремы воспользуемся методом координат. Этот метод предполагает следующие этапы.

1. К симплексу «пристраивается» ПДСК: за начало координат следует принять вершину прямых углов, а оси координат направить по рёбрам симплекса.

2. Находят координаты вершин симплекса через его катеты: каждая вершина симплекса будет иметь не более одной ненулевой координаты. Причём эта координата – длина одного из катетов [6, с. 20].

Следовательно, точка имеет координаты – координаты

. Тогда по формуле опр. 1.1 вычисляем:

= = ,

= = ,

= = .

Итак,

R=

R=

R=.

Теорема доказана.

Теорема для симплекса :

Пусть *Н -* прямоугольный симплекс, *Н* – вершина прямых углов. Тогда радиус (*R*) описанной около прямоугольного симплекса сферы определяется равенством *R =* , где катеты данного симплекса, причём *Н* = Н = Н = Н=.

Доказательство.

I. Рассмотрим прямоугольный симплекс Н(рис. 3), у которого *Н* – вершина прямых углов, катеты данного симплекса, причём *Н* = Н = Н = Н=. Докажем, что *R =* .

*О -* центр описанной около данного симплекса сферы. Так как данный симплекс прямоугольный, то по теореме 7.4 он ортоцентрический, тогда по определению 7.4 *Н* - ортоцентр. По опр. 6.3 расстояние от *Н* до *О* будет равно *R* .

А по лемме 8.1 = , где *n* – размерность симплекса,

*n* ≥ 2, *n N* .

Для симплекса :

3 =

2 =

Возведём последнее векторное равенство в квадрат, получим

4

·

Ясно, что *О = О = О == ОН = R .* По правилу треугольника для сложения векторов, т.е. по теореме 9.1, выполняется равенство =

Возведём его в квадрат, получим

²= ² - 2.

По следствию 9.2 ² = ² = R.

Отсюда найдём

=

Аналогично,

=

· =

=

· =

· =

Итак, вычисляем

4 = 4

4 =16

12 =

R = .

II. Для доказательства этой части теоремы воспользуемся методом координат. Этот метод предполагает следующие этапы.

1. К симплексу «пристраивается» ПДСК: за начало координат следует принять вершину прямых углов, а оси координат направить по рёбрам симплекса.

2. Находят координаты вершин симплекса через его катеты: каждая вершина симплекса будет иметь не более одной ненулевой координаты. Причём эта координата – длина одного из катетов [6, с. 20].

Следовательно, точка имеет координаты – координаты

, .Тогда по формуле опр. 1.1 вычисляем:

= = ,

= = ,

= = ,

= = ,

,

= .

Итак,

R =

R =

R = .

Теорема доказана.

Данная исследовательская работа имеет не только практическое значение, но и теоретическое, так как результаты, полученные в ходе обобщения, носят характер новизны и могут использоваться при подготовке и проведении научно - практических конференций.