Содержание.

I.Введение……………………………………………………………………2

II.Геометрические паркеты……………………………………………………4

1. Паркеты из одноименных правильных многоугольников…………………4
2. Паркеты из разных правильных многоугольников…………………………6
3. Паркеты из неправильных многоугольников……………………...……11
4. Паркеты из произвольных фигур…………………………………….......12

III.Орнаменты………………………………………………………………..14

1. Бордюры………………………………………..………………………14
2. Сетчатые орнаменты………………………………..…………………1 6
3. Круговые орнаменты……………………………………………………20

IV. Архитектурные и конструктивные особенности орнаментов разных стран…………………………………………………………………………..…24
V. Орнаменты вокруг нас……………………………………………………..31
VI . Математическое искусство Морица Эшра……………………………….33
Заключение…………………………………………………………………….36

Приложения…………………………………………………………………...37

I. Введение

Искусство орнамента содержит в неявном виде наиболее древнюю часть известной нам высшей математики.

Г.Вейль

Восхищаясь рукотворной красотой орнаментов, воплощённых в предметах декоративно – прикладного искусства – коврах, гобеленах, вышивке, - я не задумывалась о роли геометрии в создании этих произведений. Между тем сочетание таланта мастера и его геометрических умений занимает важное место в орнаментальном искусстве. Орнамент предназначен для украшения различных предметов (посуды, мебели, текстильных изделий, оружия) и архитектурных сооружений. Связанный с поверхностью, которую он украшает и зрительно организует, орнамент, как правило, выявляет и подчёркивает своим построением, формой и цветом архитектурные и конструктивные особенности предмета, природную красоту материала.

Объект исследования – геометрический орнамент.

Предмет исследования – конструирование орнамента с помощью законов геометрии.

Цель исследования –

- изучить принципы построения орнаментов;
- проанализировать и сравнить особенности орнаментов разных национальных культур;
- проанализировать искусство Морица Эшера с точки зрения геометрии и выявить ее геометрические составляющие.

Каждый орнамент содержит какую – ни будь тайну, а я люблю тайны. Орнамент, как бы вознаграждает меня за догадливость и умение видеть.

Каждый орнамент как человек, чем сложнее рисунок, тем интереснее человек, если, читая орнамент, окунаешься в мир прекрасного, Геометрия как один из разделов математики – это не только стройная система законов, но и уникальное средство познания мира

Орнамент – неизменный участник нашей повседневной жизни, вечный спутник, сопровождающий человечество на всех этапах его культуры. Мы видим его везде – на вещах, которые нас окружают, на нашей одежде. Это узоры на обоях и мебели, скатерти и коврах, посуде и тканях. Орнаментами, пышными и скромными, украшают фасады зданий. Орнаменты могут иметь очень сложную структуру, доступную лишь мастерам высочайшего класса.

В то же время весьма простые элементы, ритмично повторяясь, подчиняясь законам орнаментальных построений, могут сформировать очень привлекательные, а порою и неожиданные узоры.

В основе любого орнамента лежит математическая строгость организации формы, простая или усложненная система повторов; узор, как правило, строится по законам симметрии.

«Симметрия – это идея, с помощью которой человек веками пытался объяснить и создать порядок, красоту и совершенство». Г. Вейль.

Термин «симметрия» (σνμμετρυα) по-гречески означает «соразмерность, пропорциональность, одинаковость в расположении частей».

Математически строгое представление о симметрии сформировалось сравнительно недавно – в XIX веке. В наиболее простой трактовке (по Г. Вейлю) современное определение симметрии выглядит примерно так: симметричным называется такой объект, который можно как-то изменять, получая в результате то же, с чего начали.

Мы будем называть симметрией фигуры любое преобразование, переводящее фигуру в себя, т. е. обеспечивающее её самосовмещение.

Наиболее наглядно это проявляется в построении паркетов.

II. Геометрические паркеты.

Паркет (или мозаика) – бесконечное семейство многоугольников, покрывающее плоскость без просветов и двойных покрытий. Иногда паркетом называют покрытие плоскости правильными многоугольниками, при котором два многоугольника имеют либо общую сторону, либо общую вершину, либо совсем не имеют общих точек; но мы будем рассматривать как правильные, так и неправильные многоугольники.

II.1.Паркеты из одноимённых правильных много угольников.

Считается, что Пифагор сформулировал положение, что плоскость вокруг точки может быть полностью заполнена лишь тремя видами многоугольников, а именно: равносторонними треугольниками, квадратами и правильными шестиугольниками. Такие паркеты называются одноимённые.

Решение задачи естественно стоит начать с исследования вершин паркета. Из определения правильности сразу вытекает принцип эквивалентности вершин: любые две вершины устроены одинаково в том смысле, что звезды всех вершин одинаковы. (Звездой называется фигура, образованная всеми многоугольниками, содержащими ее). Введем обозначения:

m_i– число прилегающих к вершине i-угольников

α_i-величина внутреннего угла правильного i-угольника.

.

Подставляя в эту формулу известное из геометрии выражение для

$\alpha_i=\frac{(i-2)\cdot 180^0}{i}$ - величина угла правильного многоугольника, сократив данное равенство на 180 , получаем:

\

$$\sum m_i \cdot (1-\frac{2}{i}) = 2 \qquad (1)$$

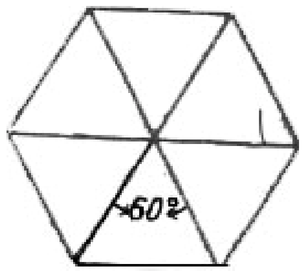
Таким образом, числа m_i являются целочисленными решениями уравнения (1).

В вершине паркета может сходиться не более шести и не менее трех многоугольников.

Сумма всех углов n – угольника равна 180°(n –2). Все углы правильного многоугольника равны; следовательно, каждый из них равен 180°(n –2)/n. В каждой вершине паркета сходится целое число углов; поэтому число 2·180° должно быть целым кратным числа 180°(n –2)/n. Разность n – 2 может принимать лишь значения 1, 2 или 4; поэтому n может быть равно только 3, 4 или 6. Значит, можно получить паркеты, составленные из правильных треугольников, квадратов или правильных шестиугольников.

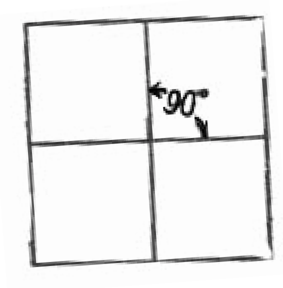
Если n = 3, то , значит это возможно сделать правильными треугольниками и их число равно 360 : 60 = 6.

$$\frac{(n-2)\cdot 180}{n} = \frac{180^o}{3} = 60^o \in \mathrm{N}$$

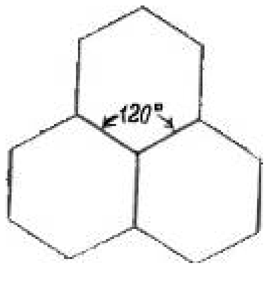


Если n = 4, то, значит это возможно сделать правильными четырехугольниками (квадратами) и их число равно 360 : 90 = 4.

$$\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n} = \frac{360^o}{4} = 90^0 \in N$$



Если n = 6, то 360 : 120 = 3 – натуральное число, значит это возможно тремя правильными шестиугольниками.



Примеры паркетов из одинаковых правильных многоугольников смотрите в приложении 1.

II. 2.Паркеты из разных правильных многоугольников.

Сначала выясним, какое количество различных правильных многоугольников (с одинаковыми длинами сторон) может находиться вокруг каждой точки. величина угла правильного многоугольника должна находиться в интервале от 60°до180° (не включая); следовательно, число многоугольников, находящихся в окрестности точки, должно быть больше 2 (360°/180°) и не может превышать 6(360°/60°).

Можно сказать, что существуют следующие способы уложить паркет комбинациями правильных многоугольников: (3, 12, 12); (4, 6, 12); (6, 6, 6); (3, 3, 6, 6) – два варианта паркета; (3, 4, 4, 6) – четыре варианта; (3, 3, 3, 4, 4) – четыре варианта; (3, 3, 3, 3, 6); (3, 3, 3, 3, 3, 3) (цифры в скобках – обозначения многоугольников, сходящихся в каждой вершине: 3 – правильный треугольник, 4 – квадрат, 6 – правильный шестиугольник, 12 – правильный двенадцатиугольник).

Возможны следующие варианты:

а) Обозначим через n – количество треугольников, m – количество квадратов, тогда должно выполняться равенство $60n+90m=360$.

Рассмотрим следующие случаи:

1) Если $n = 1$, то $90m = 360-60\cdot1$;

$$90m = 300;$$

$$m = \frac{30}{9} \notin N.$$

При $n = 1$, задача решений не имеет.

2) Если $n = 2$, то $90m = 360-60\cdot2$;

$$90m = 240;$$

$$m = \frac{24}{9} \notin N.$$

При $n = 2$, задача решений не имеет.

3) Если $n = 3$, то $90m = 360-60\cdot3$;

$$90m = 180;$$

$$m = \frac{18}{9} \in N.$$

При $n = 3$, $m = 2 \Rightarrow$ задача имеет решение.

4) Если $n = 4$, то $90m = 360-60\cdot4$;

$$90m = 120;$$

$$m = \frac{12}{9} \notin N.$$

При n = 4, задача решений не имеет.

5) Если n = 5, то 90m = 360-60·5;

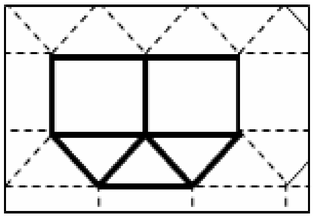
$$90m = 60;$$

$$m = \frac{6}{9} \notin N$$

При n = 5, задача решений не имеет.

При n большем пяти, задача решений не имеет, так как значения получаются больше 360.

Итак, вокруг одной точки можно уложить плоскость без пробелов тремя треугольниками и двумя четырёхугольниками.



б) Обозначим через n – количество треугольников, m – количество шестиугольников, тогда согласно гипотезе должно выполняться равенство 60n+120m=360.

Рассмотрим следующие случаи:

1) Если n = 1, то 120m = 360-60·1;

$$120m = 300;$$

$$m = \frac{30}{12} \notin N.$$

При n = 1, задача решений не имеет.

2) Если n = 2, то 120m = 360-60·2;

$$120m = 240;$$

$$m = \frac{24}{12} \in N.$$

При n = 2, $\Rightarrow$ m = 2 задача имеет решение.

3) Если n = 3, то 120m = 360-60·3;

$$120m = 180;$$

$$m = \frac{18}{12} \notin N.$$

При n = 3, задача решений не имеет.

4) Если n = 4, то $120m = 360-60\cdot4$;

$$120m = 120;$$

$$m = \frac{12}{12} \in N.$$

При n = 4, m = 1 $\Rightarrow$ задача имеет решение.

5) Если n = 5, то $120m = 360-60\cdot5$;

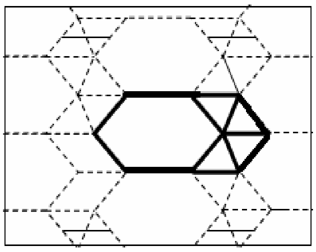
$$120m = 60;$$

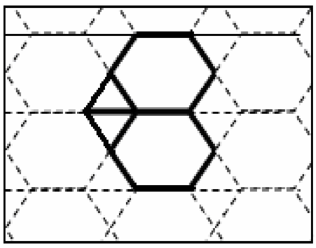
$$m = \frac{6}{12} \notin N.$$

При n = 5, задача решений не имеет.

При n, большем пяти, задача решений не имеет, так как значения получаются больше 360.

<u>Итак, вокруг одной точки можно уложить плоскость без пробелов двум треугольниками и двумя шестиугольниками; четырьмя треугольниками и одним шестиугольником.</u>





в) Обозначим через n – количество квадратов, m – количество восьмиугольников, тогда согласно гипотезе должно выполняться равенство $90n+135m=360$.

Рассмотрим следующие случаи:

1) Если n = 1, то $135m = 360-90\cdot1$;

$$135m =270;$$

$$m = \frac{270}{135} \in N.$$

При n = 1, m = 2 $\Rightarrow$ задача имеет решение.

2) Если n = 2, то 135m = 360-90·2;

$$135m = 180;$$

$$m = \frac{180}{135} \notin N.$$

При n = 2, задача решений не имеет.

3) Если n = 3, то 135m = 360-90·3;

$$135m = 90;$$

$$m = \frac{90}{135} \notin N.$$

При n = 3, задача решений не имеет.

4) Если n = 4, то 135m = 360-90·4;

$$135m = 0;$$

$$m = \frac{0}{135} \notin N.$$

При n = 4, задача решений не имеет.

При n, большем четырёх, задача решений не имеет, так как значения получаются больше 360.

Итак, вокруг одной точки можно уложить плоскость без пробелов одним четырёхугольником и двумя восьмиугольниками.

Примеры паркетов из разных правильных многоугольников смотрите в приложении 1

Возможны и другие случаи :

1) три разных многоугольника с *n*, *m* и *k* вершинами;
2) с четырьмя многоугольниками в вершине ;
3) паркет с пятью многоугольниками в вершине.

II. 3. Паркеты из неправильных многоугольников.

Легко покрыть плоскость параллелограммами. Вообще можно замостить плоскость копиями произвольного четырёхугольника, необязательно выпуклого. Можно составить паркет из копий произвольного треугольника: из двух равных треугольников можно сложить параллелограмм, и покрыть плоскость копиями этого параллелограмма.

Ещё плоскость можно покрыть копиями центрально – симметричного шестиугольника, или копиями пятиугольника с двумя параллельными сторонами. До сих пор не найдены все типы выпуклых пятиугольников, из которых складываются паркеты. Зато доказана теорема, утверждающая: «Нельзя сложить паркет из копий выпуклого семиугольника».

Примеры паркетов из неправильных многоугольников смотрите в приложении 2

II. 4. Паркеты из произвольных фигур.

Некоторые определения паркета не ограничиваются многоугольниками; в этом случае паркетом называется покрытие плоскости без пропусков и перекрытий заданными фигурами (в частном случае – многоугольниками, правильными или неправильными, выпуклыми или невыпуклыми). В таком случае даже для паркетов из многоугольников может не соблюдаться требование «два многоугольника должны иметь общую вершину, общую сторону или совсем не иметь общих точек»; кроме того, появляется множество разнообразных паркетов, состоящих не из многоугольников, а из криволинейных фигур. Рассмотрим способы построения нового паркета, исходя из этого «расширенного» определения. Итак, как нарисовать паркет? (некоторые из возможных способов).

Способ первый. Берём некоторую сетку (уже известный нам паркет) – из правильных треугольников, шестиугольников, квадратов, или из произвольных многоугольников, и выполняем преобразования: сжатие/растяжение, замена прямолинейных отрезков кривыми с началом и концом в тех же точках, что и у кривых отрезков… Пример: паркеты, полученные заменой отрезков «квадратной» сетки некоторыми кривыми или ломаными.

Способ второй. Объединяем отдельные элементы уже существующих паркетов. Примеры: паркеты, полученные в результате объединения элементов квадратной сетки. Паркет, каждый элемент которого получен в результате объединения пяти правильных треугольников.

Способ третий. Берём существующую сетку и дополняем её новыми линиями.Получаем разбиение плоскости на фигуры, которые затем можно по-новому объединить. В частном случае – накладываем, друг на друга две (или более) сетки уже известных паркетов, смещая или поворачивая одну сетку относительно другой; фигуры, образовавшиеся при пересечении линий, считаем элементами паркета. Пример: разбиения сетки из греческих крестов.

Способ четвёртый. Выбираем некоторую кривую или ломаную и начинаем её переносить на некоторый вектор, поворачивать, отражать… получившиеся кривые или ломаные размещаем на плоскости таким образом, чтобы они образовали замкнутые контуры (которые в дальнейшем будут рассматриваться как элементы паркета). Если рассматривать только незамкнутые кривые и ломаные, паркеты будут напоминать полученные способом № 1. Для получения следующего паркета была взята дуга спирали, три раза повёрнута на 90°, а затем к получившейся фигуре был применён параллельный перенос. А вот паркеты полученные с помощью параллельного переноса звёздчатых многоугольников.

Существуют паркеты из копий правильного многоугольника, правильные «по граням», т.е. допускающие самосовмещения, которые переводят любую заданную плитку в любую другую.. Многоугольники, которые могут быть плитками в этих паркетах, называются планигонами (приложение 3).

Красивый паркет из криволинейных плиток получается деформацией обычного шестиугольного паркета из правильных шестиугольников. Как легко видеть, его можно продолжить на всю плоскость. Как устроены отдельные плитки, показано на схеме внизу. Стороны треугольников заменены дугами описанных около них окружностей (приложение 3).

Все вышеперечисленные паркеты периодичны, т.е. в каждом из них можно выделить составленную из нескольких плиток область, из которой параллельными сдвигами получается весь паркет.

Интерес ученых к таким конструкциям объясняется тем, что периодические замощения, особенно замощения пространства, моделируют кристаллические структуры.

Существуют и непериодические замощения, например спиральное замощение плоскости девятиугольниками, придуманное в 1936 году немецким математиком Х. Фодербергом (приложение 4).

III.Орнаменты.

Орнамент – (от латинского ornamentum – украшение) узор, состоящий из ритмически упорядоченных элементов для украшения каких-либо предметов или архитектурных сооружений.

По характеру композиции и расположению на украшаемой поверхности орнамент может быть нескольких видов: ленточным (его еще называют бордюром), сетчатым и розетчатым.

III.1. Бордюры.

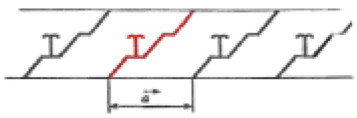
Бордюром называют плоскую геометрическую фигуру, характеризующуюся векторами $\bar{a}$ и $n\bar{a}$ (где n – целое число), при которых эта фигура переходит в себя, но не переходит в себя при параллельных переносах иного вида. Вектор $\bar{a}$ называют направляющим для бордюров.

Простейший бордюр построить очень просто: достаточно нарисовать какую-нибудь геометрическую фигуру и выполнить параллельный перенос на заданный вектор влево и вправо вдоль полосы. Такая «первоначальная фигура» называется фундаментальной областью бордюра.

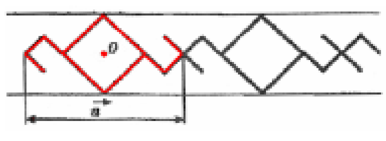
Бордюры встречаются в разных местах: в настенных росписях, на лестничных переходах, в архитектуре. Их можно увидеть в чугунном литье, которое используется в оградах парков, решетках мостов и набережных.

Существует семь классов симметрии бордюров.

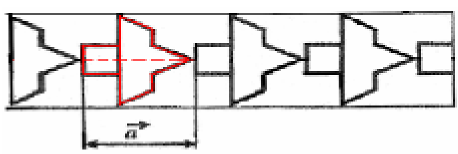
Первый – бордюры, которые не имеют иных симметрий, кроме параллельных переносов.



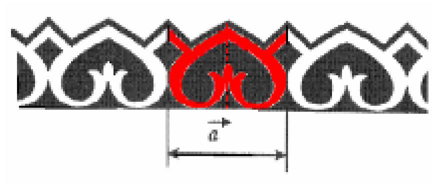
Второй – бордюры, у которых фундаментальная область обладает центром симметрии *O*.



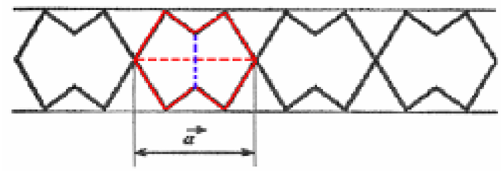
Третий – бордюры, у которых фундаментальная область имеет ось симметрии, параллельную вектору $\bar{a}$.



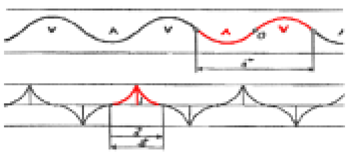
Четвертый – бордюры, у которых фундаментальная область имеет ось симметрии, перпендикулярную вектору $\bar{a}$.



Пятый - бордюры, у которых фундаментальная область имеет одну ось симметрии, перпендикулярную вектору $\bar{a}$, а другую параллельную вектору $\bar{a}$.



Шестой и седьмой – бордюры, имеющие такие оси симметрии, которых нет у фундаментальных областей.



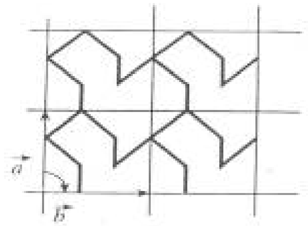
Например, фундаментальная область имеет кроме тождественного преобразования еще одну симметрию, центральную относительно точки O. Но если бесконечно много раз последовательно переносить эту фигуру на вектор $\bar{a}$, то получим бордюр с бесконечно большим числом осей симметрии, перпендикулярных вектору $\bar{a}$.

Или фундаментальная область на рисунке имеет осевую симметрию. Перенесем эту область на вектор $\bar{a}$, а потом выполним симметрию относительно оси l. Получим узор, имеющий центр симметрии. Повторяя эту операцию n раз, построим бордюр, имеющий n центральных симметрий.(приложения 5 и 6).

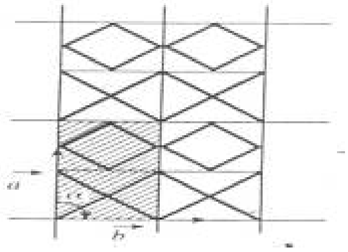
III.2.Сетчатый орнамент

Помимо бордюров художникам-орнаменталистам известен другой вид орнамента – сетчатый. Он заполняет всю плоскую поверхность сплошным узором. Для построения такого орнамента выделяют плоскую решетку, в которой одинаковые части повторяются в определенной геометрической последовательности. Различают пять типов плоских решеток, каждая из которых определяется двумя векторами $\bar{a}$ и b и углом между ними.

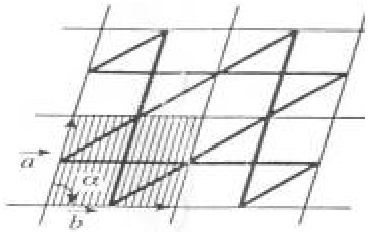
Квадратная – a=b, α= 90^0



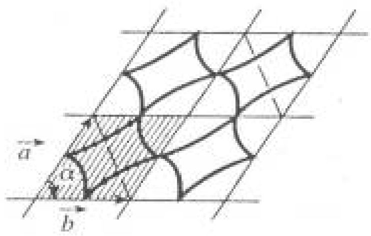
Прямоугольная - a≠b, α=90^0



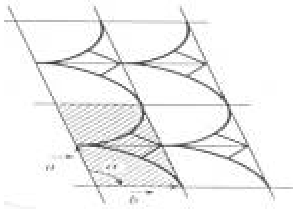
Гексальная - a≠b, α=60^0



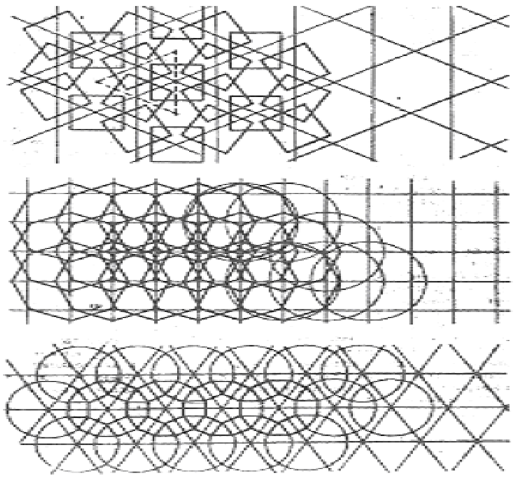
Ромбическая - a=b, α≠90^0, α≠60



Косая - $a \neq b$, $\alpha \neq 90^0$



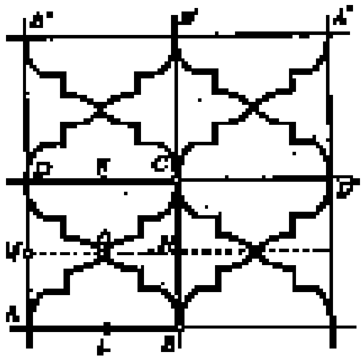
Символическое значение имеет не только отдельно взятая фигура, но любая композиция, построенная на симметричной сетке. Для равномерного заполнения поверхности каким-либо отдельным видом фигур, можно использовать любую из исходных фигур. Симметричная сетка, на которой развертываются затейливые композиции, дает возможность созерцать «божественное единство, позволяющее себя в многообразии».

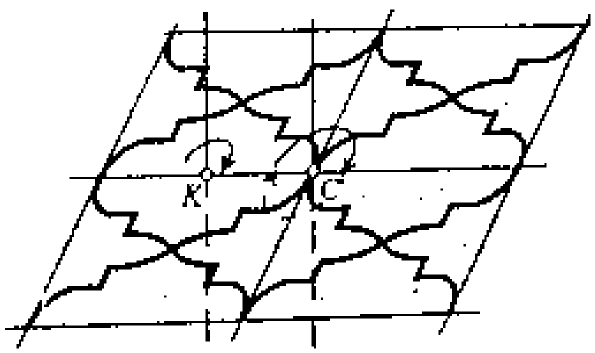


Вид орнамента определяется не только структурой его решетки, но и числом элементов его симметрии. Зная геометрические закономерности, можно и самим сконструировать интересный орнамент или определить те геометрические преобразования, которые положены в его основу.

На рисунке показан прямоугольник *ABCD,* который может служить ячейкой орнамента. Тогда каждую сторону прямоугольника и одну из его средних линий — *MN* — будем использовать как ось симметрии. (На рисунке выполнена осевая симметрия относительно только оси *CB.)* Таким образом, орнамент будет содержать пять осей симметрии.

Чем больше элементов симметрии содержит элементарная ячейка, тем интереснее и красивее орнамент. Возьмем, например, квадратную ячейку орнамента на рисунке. Ясно, что каждая прямая, проходящая через сторону квадрата, а также прямая *MN* в ячейке *ABCD* может стать осью симметрии орнамента. Кроме того, укажем девять точек *(A, B, C, D, M, O, N, L, K),* вокруг которых можно повернуть ячейку, чтобы образовать новую ячейку или совместить старую ячейку саму с собой.





Вокруг указанных точек можно сделать в одном направлении только два желаемых поворота — на угол в 180° и на угол в 360°. Поэтому точки *B, C, D, M, O, N, L,* называются центрами поворота осей второго порядка (порядок оси определяется числом поворотов обеспечивающих совмещение элементов орнамента). Сами оси упомянутых поворотов проходят перпендикулярно плоскости орнамента, поэтому на рисунке они не видны. Но две из них специально показаны на пространственном чертеже. Например, если повернуть ячейку *ABCD* вокруг точки *C* на 180°, то получим ячейку *ABCD.* Но если ту же ячейку повернуть на 180° вокруг точки *К,* то получим ячейку *B B'DC.* При поворотах на 360^{е} вокруг точек *C, К* и других квадрат *ABCD* совмещается сам с собой.

В простейшем случае орнамент характеризуется только переносной симметрией. Таков, например, орнамент «Летящие птицы». Чтобы построить этот орнамент, надо выбрать соответствующую косую решётку, «заполнить» элементарную ячейку решётки определённым рисунком и затем многократно повторить этот рисунок за счёт переносов ячейки без изменения её ориентации (приложение 9).

В отличие от орнамента «Летящие птицы» египетский орнамент обладает более высокой симметрией, о чём свидетельствует наличие поворотных осей, а также обычных и скользящих осей зеркальной симметрии.

Симметрия египетского орнамента будет ещё более высокой, если упростить его окраску – вместо красного и синего цветов использовать один цвет, например красный(приложение 10).

Весьма интересен орнамент «Ящерицы». Он представляет собой мозаику, составленную из совершенно одинаковых изображений ящериц. Ящерицы плотно уложены на поверхности орнамента (без промежутков или накладок). Эта мозаика обладает не только переносной, но и поворотной симметрией. Переносная симметрия орнамента определяется гексагональной решёткой, а поворотная – наличием поворотных осей в точках A, B, C, D, E, F, G, H и др. Порядок поворотных осей зависит от расцветки орнамента. В случае трёхцветного орнамента (используются ящерицы трёх разных цветов) все поворотные оси имеют 2-й порядок . Одноцветный орнамент наряду с поворотными осями 2-го порядка имеет также оси 3-го и 6-го поря). Зеркальной симметрией орнамент «Ящерицы» не обладает

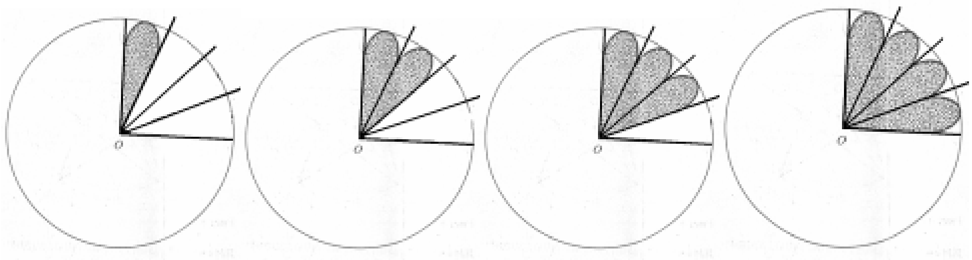
В приложении приведены типы симметрии плоских орнаментов. Здесь толстые прямые линии изображают обычные оси симметрии, а штриховые – скользящие. Для обозначения точек пересечения поворотных осей с плоскостью орнамента используются чечевицы (оси 2-го порядка), треугольники (3-го порядка), квадратики (4-го), шестиугольники (6-го).

III.3.Круговые орнаменты.

Розетки – это круглые орнаменты, встречающиеся в резьбе по дереву, в настенной лепке, в вышивках, в ковровых изделиях.

Выясним, какие геометрические приемы используются при составлении замкнутых орнаментов – розеток и герихов.

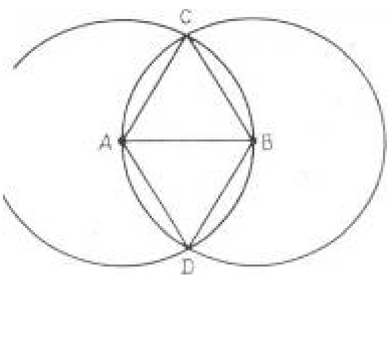
1.Деление окружности на равные части с помощью транспортира, использование симметрии.

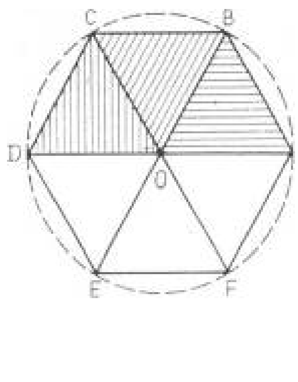


Основообразующей формой этого орнамента является круг. Затем художник разбивает его на части, в одной части рисует узор, а потом с помощью симметрии повторяет его в других частях круга. Именно такое построение окна над входом в Готическую капеллу в Петергофе.

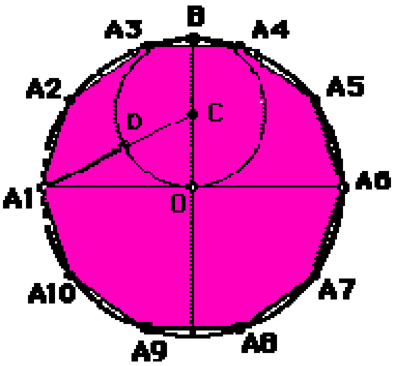
2.Деление окружности на n равные части с помощью циркуля и линейки.

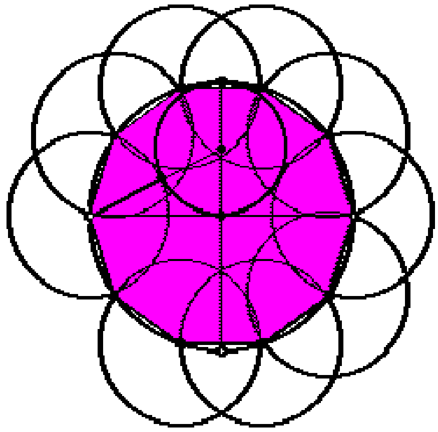
1)пусть n=6. В равностороннем треугольнике все углы равны. А так как их сумма равна 180°, то на долю каждого приходятся по 60°. Сложим три таких треугольника так, как показано на рисунке. В угле AOD 3· 60° = 180°, и поэтому этот угол развернутый. Приложив снизу еще три таких же треугольника, получаем шестиугольник ABCDEF. Все стороны этого шестиугольника имеют одинаковую длину, а все углы равны друг другу – в каждом из них по 20 · 60° = 120°. Кроме того, все отрезки OA, OB, OC, OD, OE, OF имеют одинаковую длину. Поэтому точки A, B, C, D, E, F лежат на одной и той же окружности с центом O. Шестиугольник ABCDEF вписан в окружность. Теперь ясно, что для того, чтобы поделить окружность на шесть равных частей достаточно провести ее диаметр AD и построить две окружности с центрами A и D так, чтобы ни прошли через центр O заданной окружности. Точки B, C, E, F, в которых эти окружности пересекают заданную, вместе с точками A и D делят данную окружность на шесть равных частей.



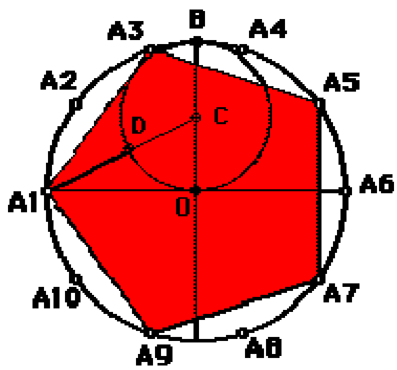


2) n=5. Пусть O - центр окружности, A - точка на окружности и E - середина отрезка OA. Перпендикуляр к радиусу OA, восстановленный в точке O, пересекается с окружностью в точке D. Пользуясь циркулем, отложим на диаметре отрезок CE= ED. Длина стороны вписанного в окружность правильного пятиугольника равна DC. Откладываем на окружности отрезки DC и получим пять точек для начертания правильного пятиугольника. Соединяем углы пятиугольника через один диагоналями и получаем пентаграмму.



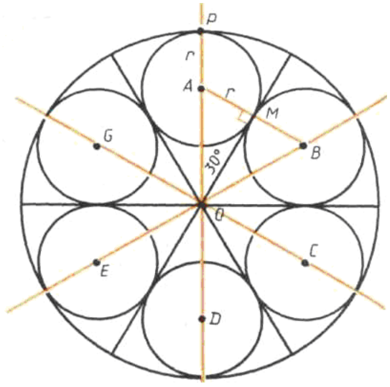


3) n=5. Построение правильного пятиугольника через построение правильного десятиугольника. Пусть дана окружность радиуса R, с центром O. Построим сначала правильный десятиугольник, вписанный в окружность. Для этого проведем взаимно перпендикулярные радиусы OA1 и OB окружности и на отрезке OB как на диаметре построим окружность с центром C. Отрезок A1C пересекает эту окружность некоторой точке D. Далее отметим на окружности w точки A2, A3, … , A10 так, что A1A2=A2A3….=A9A10 = A1D. Десятиугольник A1A2…A10-искомый. Для того, чтобы построить правильный пятиугольник нужно соединить точки данного десятиугольника через одну, значит соединим точки A1,A3,A5,A7,A9. Пятиугольник A1A3A5A7A9- искомый. Стороны пентаграммы, пересекаясь, делят друг друга на отрезки, длины которых образуют золотую пропорцию.



3.В данную окружность вписать n равных окружностей, расположенных внутри окружности радиуса R, касающихся между собой и данной окружности. Найдите радиусы этих окружностей.

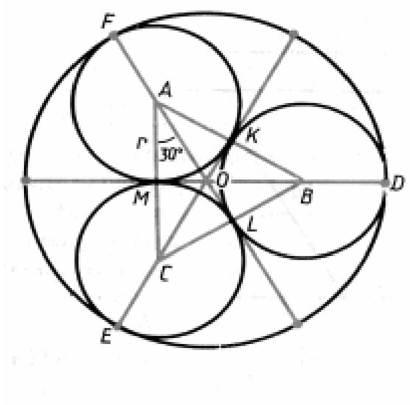
1) Пусть n = 6. Проведем произвольный диаметр окружности. Каждый из двух образовавшихся развернутых углов разобьем на три равных угла по 60°. Получим шесть углов по 60°. Построим биссектрисы этих углов. Пусть A – центр искомой окружности, M – точка ее касания с другой искомой окружностью, P – точка пересечения биссектрисы с данной окружностью. Треугольник OAM – прямоугольный с острым углом в 30° при вершине O. Но тогда OA = 2r (где r – радиус искомой окружности), OP = 3r, r = 1/3R. Разделив R на три равные части, получим радиус искомой окружности.



2)Пусть n=3.

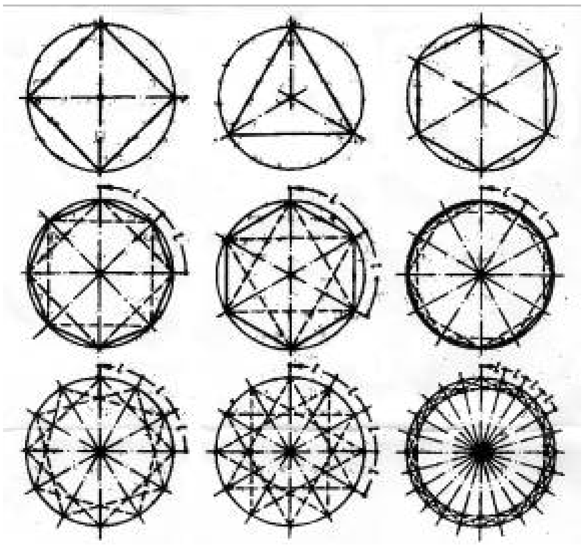
Построим окружность радиуса R, с центром O. Изобразим три равные окружности, касающиеся друг друга и первой окружности. Для этого сначала зрительно представим их расположение на рисунке. A, B и C — центры равных окружностей, D, E, P — точки их касания с данной окружностью, K, L, M — точки их касания друг с другом. Радиусы равных окружностей обозначим r. ΔABC равносторонний. Точки M, O, B, O лежат на одной прямой, так как каждая из них равноудалена от точек A и C. Аналогично точки K, O, C, E лежат на одной прямой. Точки F, A, O, L также лежат на одной прямой.

Рассмотрим, например, треугольник AOM. В нем AM = r, AO=OF—AF=R — r, угол OAM = 30 °, угол AMO прямой. Получаем AM=AOcos30°, т. е. r=(R—r)$\frac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда. $2r = R\sqrt{3} - r\sqrt{3}, r = \frac{R\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$. Задача решена.



<u>Таким образом были рассмотрены различные геометрические приемы построений розеток. Эти приемы дают возможность легко создать изящный и красивый орнамент любой сложности.(приложение   ).</u>

Орнамент герих – линейно – геометрический орнамент, построенный на сложном сочетании многоугольников и многолучевых звезд. Восходящая в своей основе к классическим античным мотивам арабеска, получившая распространение в странах среднего Востока, явилась новым типом орнаментальной композиции, позволявшей художнику заполнять сложным, плетеным, подобно кружеву, узором плоскости любого очертания. Первоначально в арабеске преобладали растительные мотивы. Позднее получил распространение герих – линейно-геометрический орнамент, построенный на сложном сочетании многоугольников и многолучевых звезд. В разработке герихов, применявшихся как для украшения больших архитектурных плоскостей, так и различных бытовых предметов, восточные мастера достигли изумительной виртуозности, создав бесчисленное множество композиций, в которых всегда сочетаются два начала: логически-строгое математическое построение узора и одухотворяющая фантазия художника.



Отличительной чертой гериха является плоскостное изображение, а с точки зрения построения для него характерны все виды симметричных преобразований. Окружность и правильные многоугольники, полученные делением ее на равные части,- треугольник, квадрат, шестиугольник, восьмиугольник и т.д., считаются исходными, т.к. с них начинается любое орнаментальное построение и на них в принципе разложимы почти все орнаментальные композиции. В восточных герихах геометрический орнамент получают путем вращения вокруг центра квадрата, треугольника, шестиугольника. На Востоке этим числам придается особый, сакральный смысл.

IV. ***Архитектурные и конструктивные особенности орнаментов разных стран.***

Все орнаментальные рисунки можно разделить на **три вида:**

Орнамент изобразительный, включающий в себя конкретный рисунок человека, животных, растений, пейзажные или архитектурные мотивы, рисунок предметов неживой природы или сложную эмблему.

Орнамент неизобразительный, образованный из геометрических элементов, абстрактных форм, лишенных конкретного предметного содержания.

Орнамент комбинированный, представляющий собой сочетание изобразительных мотивов или отдельных элементов, с одной стороны, и абстрактных форм с другой.

Число абстрактных неизобразительных форм весьма велико, но линии, которые резко отличаются одна от другой только три:

- прямые - вертикальные, горизонтальные, наклонные;
- кривые – с постоянным радиусом кривизны - окружности и их дуги;
- кривые – с переменным радиусом кривизны – параболы, гиперболы.

Эти линии являются первичными элементами для всех орнаментальных образований. Все три вида линий обладают зрительной выразительностью и не похожи одна на другую. Сами по себе прямые и кривые линии не являются носителями художественной выразительности, но при определенных условиях они могут «обнаружить» скрытый в них эмоциональный заряд. Так, прямые и кривые с постоянным радиусом кривизны способны выразить плавное, спокойное движение. В природе этих линий лежат постоянство, статика, уравновешенность. Считается, что горизонтальные линии в орнаменте символизируют стройность, строгость, определенную стабильность; наклонные же прямые линии создают впечатление постоянного движения.

Например, зигзаг (ломаная линия) в Древнем Египте служила знаком воды. Она находила применение в орнаментах многих народов в самые разные времена.

Шевроны – ломаная лента с ритмическим чередованием узора. Встречается в декоративном искусстве Китая.

Меандр – ломаная под прямым углом линия. Самые первые образцы этого орнаментального мотива относятся к эпохе палеолита. Позже меандр использовался в греческой керамике, в искусстве древних жителей Мексики.

Квадрат и прямоугольник являются основной формой в орнаменте. Они служат для ограничения поверхности, заполненной орнаментальными мотивами. Их можно видеть на старинных греческих вазах, а также в архитектуре – кессонированные потолки Эпохи Возрождения.

Шашечный орнамент широко используется в узорах тканей со времен Древнего Египта вплоть до наших дней.

Шестиугольник и восьмиугольник были очень распространены в декоративном искусстве мусульманских стран. К прямолинейным мотивам, широко использовавшимся с доисторических времен, следует отнести крест и свастику, которые служили в качестве религиозных символов: крест – на Западе, свастика – в странах Центральной и Юго-Восточной Азии.

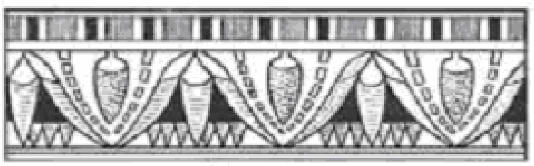
Окружность считается одной из самых совершенных и законченных форм. Она используется и как собственно орнаментальный элемент и для ограничения поверхности. Важную роль играли окружности в средневековых орнаментах (так называемые готические «розы»).

Мотив спирали был распространен еще в эпоху неолита. Стал излюбленным мотивом в древнем искусстве Египта, Ассирии, Греции.

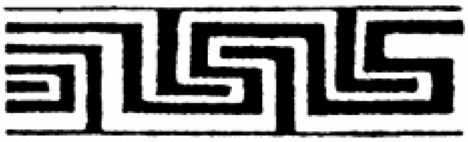
Линии с переменным радиусом кривизны несут в себе динамичность, напряженность, неравномерность и активное движение. Мотивом «бегущая волна» в древности пользовались как символом непостоянства жизни.

Каждая эпоха, каждая национальная культура выработала свою систему орнамента – мотивы, формы, расположения на украшаемой поверхности. Поэтому часто по орнаменту можно определить, к какому времени и к какой стране относится то или иное произведение искусства.

В орнаментах Древнего Египта наибольшее распространение нашли растительные мотивы, и среди них особенно часто встречались листья и цветы лотоса. Египтяне очень любили тайны. Над загадками их архитектуры и науки и сейчас бьются ученые-египтологи. Рассматривая орнамент, вам бросаются в глаза нераспустившиеся бутоны. Но, перевернув его «вверх ногами», орнамент предстанет совсем другим: вы увидите лотос во всей красе, он широко раскинул свои лепестки.

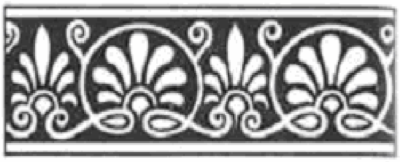


Классическими стали наиболее распространенные древнегреческие орнаменты – меандр и акант .Слово «меандр» происходит от названия очень извилистой реки в Малой Азии. Ныне она называется Большой Мендерес. Орнамент «меандр» как будто повторяет излучины этой прихотливой реки.

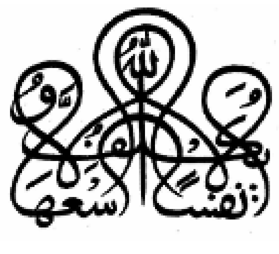


Акант – это род травянистого растения,

распространенного в Средиземноморье. У него большие листья, красиво изогнутые стебли (приложение 13).



Не будет преувеличением сказать, что нигде орнаментальное искусство не достигло такого расцвета и совершенного воплощения как на мусульманском Востоке. Для него характерно сочетание геометрических и растительных мотивов, так как Кораном было запрещено изображение людей и животных. В искусстве орнамента декоративность приобрела особенно яркие и своеобразные черты, став основой образного строя живописи и породив богатейшее искусство узора, обладающего сложным орнаментальным ритмом и часто повышенной колористической звучностью. В тесных рамках средневекового мировоззрения художники Востока нашли свой путь воплощения богатства окружавшей их жизни. Ритмом узора, его «ковровостью», тонкой пластичностью орнаментальных форм, неповторимой гармонией ярких и чистых красок они выражали большое эстетическое содержание. Одна из главных черт Восточного орнамента – тотальное заполнение пространства изображениями растительных элементов. Восходящая в своей основе к классическим античным мотивам арабеска, получившая распространение в странах среднего Востока, явилась новым типом орнаментальной композиции, позволявшей художнику заполнять сложным, плетеным, подобно кружеву, узором плоскости любого очертания. Первоначально в арабеске преобладали растительные мотивы. Таким образом, появился новый тип орнаментальной композиции - «арабеска» (от ит. arabesko-арабский). В исламских странах арабеска безраздельно господствует в архитектурном декоре, украшая как культовые, так и светские постройки. Вглядитесь в арабеску на рисунке. Не кажется ли вам, что вы погружаетесь в нее, как в неизвестный мир? На первый взгляд вы видите повторения, диктуемые симметрией, но это только самые крупные элементы орнамента. Распознать основной, мельчайший элемент (фундаментальную область) на глаз чрезвычайно трудно (приложение 14).



Высокого развития достиг орнамент в средневековой Руси. Для русского орнамента характерны как геометрические и растительные формы, так и изображения птиц, зверей, фантастических животных и человеческих фигур. Наиболее ярко русский орнамент выражен в резьбе по дереву и в вышивке. В плоском орнаменте одним из наиболее часто используемых мотивов является так называемая плетенка – различного вида переплетения полосок типа лент, ремней, стеблей цветов.

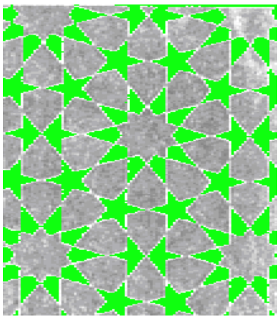
Русский орнамент противоречив, как русская душа. В нем вроде бы все просто, много свободного пространства, как будто на бескрайнем белоснежном поле распустились невиданные цветы. Сначала они кажутся незатейливыми, но если всмотреться, то не хочется и глаз отводить. (приложение 15).

Сетчатый вид орнамента наибольшее распространение нашел в паркетах и мозаиках.

Византийская мозаика представляет собой одно из древнейших достижений по созданию симметричных замощений плоскости. Хотя условие периодичности могло возникнуть как некоторая независимая задача, практические цели архитектурного оформления требовали создания орнаментов именно такого типа. Одна или небольшое число плиток одной и той же формы должны были создавать основной элемент покрытия. Элемент орнамента должен был иметь возможность неограниченного продолжения, так чтобы, в конце концов, замостить любую часть плоскости.

Наиболее сильное развитие орнаментальной техники произошло в мусульманском искусстве. Элементарные ячейки орнаментов сильно усложнились. Требование периодичности вынуждало художников проявлять особую изощренность при создании рисунка. Даже присутствие пятиугольных и семиугольных элементов не привело к отступлению от периодической структуры покрытия. (На рисунках орнамент на мавзолее Шах-и–Зинда в Самарканде, 16 век).

Если обратиться только к геометрическим особенностям орнаментов, то в мавританском дворце в Альгамбре (Испания) содержится уникальное собрание различных видов покрытий. Именно здесь был обнаружен орнамент с симметрией 5-го порядкаТак же, как и в орнаментах Средней Азии, рисунок создавался с помощью геометрических построений пятиугольника . В основе приведенной мозаики лежат всего три элемента (если не считать формы промежутков между ними). Теперь орнамент создается уже не с помощью одинаковых плит с одинаковым рисунком, а путем плотной упаковки нескольких элементов определенной формы. Одно из важных достижений художников из Альгамбры состояло в экспериментальном доказательстве существования плотной упаковки (и далеко не единственным способом).



Интересны узбекские орнаменты – загадки древних мастеров. Древние мастера Средней Азии славились тем, что орнаменты, которые они создавали, носили ярко выраженный геометрический характер. Построение было основано на симметрии и свойствах вписанных многоугольников. Все элементы орнаментов мастера строили только с помощью циркуля и линейки, повторение элементов осуществляли на основе симметрии. Таким образом, можно было сделать сетку из правильных геометрических фигур (квадратов, треугольников, шестиугольников и т.д.). Дальнейшее творчество зависело от фантазии мастера. Такие орнаменты называются «гирих». Многообразие орнаментов типа «гирих» наиболее богато представлено решетками, которые вставлялись в двери и окна с целью защиты от палящего солнца. Такие орнаменты строились с помощью симметрии, причем необходимо найти все оси симметрии,

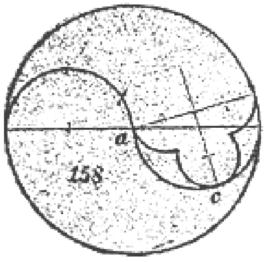
Иран – один из крупнейших древних центров ковроделия. Иранские ковры известны европейцам с XVI века. Персидский ковер, который славится красотой цвета и изощренностью линейного узора, стал самым ярким выражением особенностей декоративного искусства Ирана. Иранские ткани пользовались мировой известностью. Были распространены ткани с растительным орнаментом, а также ткани с фигурными изображениями – целыми композициями, навеянными литературными произведениями. Здесь были запечатлены подвиги героев, сцены охоты, животные и птицы. В создании рисунков тканей и ковров, участвовали крупнейшие художники.

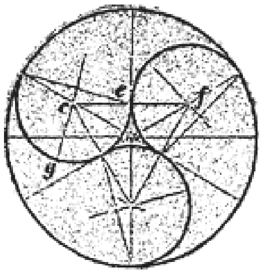
В основе рисунка данного ковра лежит принцип составления бордюров, а именно, использование различных классов симметрии.

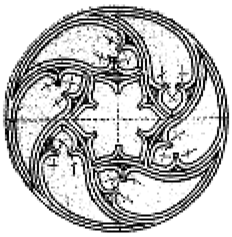
Розетка – яркий элемент различных архитектурных стилей.

1)Готический стиль.

В готическом стиле розетки часто использовались при оформлении красочных витражей. На данных примерах мы видим, что орнаменталистам приходилось при составлении узоров использовать различные приемы геометрических построений. Чаще всего – это вписанный в круг треугольник, квадрат; вписанные окружности равных радиусов – чаще 3, 4, 5, 6; розетки строились с помощью симметрии и с помощью деления окружности на равные части. На рисунках розеток прослеживаются четкие геометрические закономерности(приложение 16).





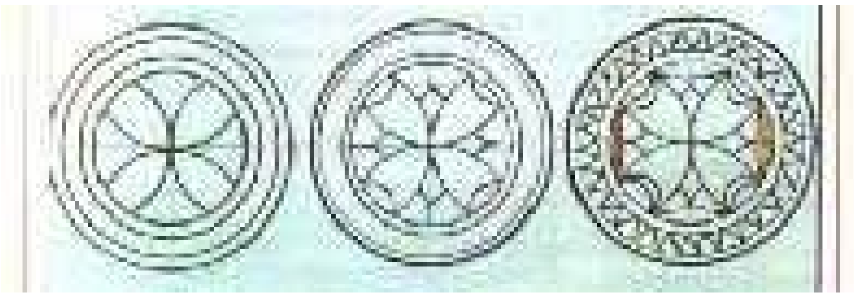


2)Русский стиль.

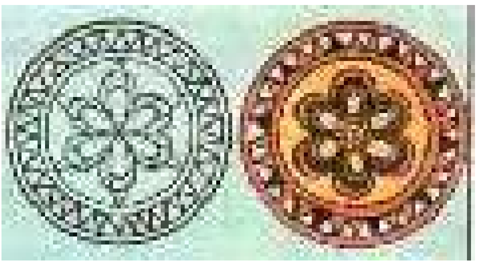
Рассмотрим составляющие основных видов розеток русского стиля.

Вначале следует определить центр, затем провести циркулем необходимое количество концентрических кругов окружностей. Внутреннюю окружность необходимо делить на 4, 6, 8, 12 частей, с тем чтобы выполнить элементы в круге.

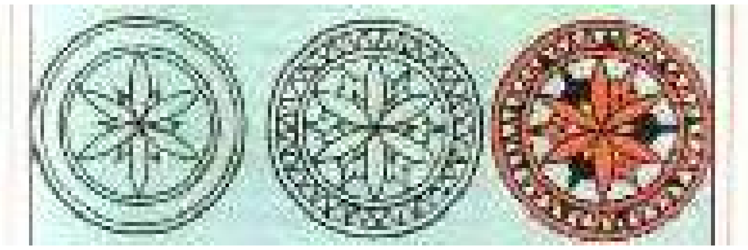
В первом случае имеем 4- лепестковый крест - цветок. Из точек, делящих окружность на четыре части, проводим четыре дуги радиусом, равным радиусу внутренней окружности. Далее прорисовываем все остальные элементы (зубочки, скобочки, капельки, ромбики).



Во втором и третьем случаях делим окружность на шесть равных частей, проводя дуги из точек их пересечения с окружностью. При этом радиус дуги равен радиусу окружности. Теперь остается закончить построение розетки (зубчики, лепестки, точки) - и вторая розетка готова.



Для третьей розетки следует продолжить построение, поделив дугу между лучами звездочек пополам, нарисовать остроконечный контурный лепесток.



Четвертая розетка - 8 - конечный крест. Окружность делим сначала на четыре, затем на восемь частей. Заканчиваем работу выполнением элементов росписи - зубчиков, точек, фигурных лучиков - лепестков.

В приложениях 13-16 приведены образцы орнаментов разных культур.

VI. Орнаменты вокруг нас.

Орнамент – неизменный участник нашей повседневной жизни, вечный спутник, сопровождающий человечество на всех этапах его культуры. Мы видим его везде – на вещах, которые нас окружают, на нашей одежде. Это узоры на обоях и мебели, скатерти и коврах, посуде и тканях. Орнаментами, пышными и скромными, украшают фасады зданий. Прекрасными примерами орнаментальных построений являются многочисленные решетки нашего города. Орнаменты могут иметь очень сложную структуру, доступную лишь мастерам высочайшего класса.

В то же время весьма простые элементы, ритмично повторяясь, подчиняясь законам орнаментальных построений, могут сформировать очень привлекательные, а порою и неожиданные узоры.

В основе любого орнамента лежит математическая строгость организации формы, простая или усложненная система повторов; узор, как правило, строится по законам симметрии.

Человеческое творчество во всех своих проявлениях тяготеет к симметрии. На этот счёт хорошо высказался известный французский архитектор Ле Корбюзье, в своей книге «Архитектура XX века» он писал: «Человеку необходим порядок: без него все его действия теряют согласованность, логическую взаимность. Чем совершеннее порядок, тем спокойнее и увереннее чувствует себя человек. Он делает умозрительные построения, основываясь на порядок, который продиктован ему потребностями его психики, это творческий процесс. Творчество есть акт упорядочения».В приложениях 17, 20приведены примеры использования различных видов орнамент:

- в архитектуре;
- в оформлении интерьеров;
- в ландшафтном дизайне;
- в полиграфии;
- в дизайне одежды

Удивительные образцы орнаменты создала природа.

> «Нам нравится смотреть на проявление симметрии в природе, на идеально симметричные сферы планет и солнца, на симметричные кристаллы, на снежинки, цветы, которые почти симметричны».
>
> Р.Фейнман

Внутреннее устройство кристалла представляется в виде так называемой пространственной решётки, в одинаковых ячейках которой, имеющих форму параллелепипедов, размещены по законам симметрии одинаковые мельчайшие материальные частицы – молекулы, атомы, ионы или их группы.

Опираясь на эти представления, А. В. Гадолин в 1867 г. доказал, что всего существует 32 вида симметрии идеальных форм кристалла. Любое кристаллическое вещество, каждый кристалл должны принадлежать к одному из этих видов симметрии. Эти утверждения представляет закон симметрии, один из законов кристаллографии.

Следующий фундаментальный результат был получен в 1890 г. русским кристаллографом Е. С. Фёдоровым и одновременно немецким математиком А. Шенфлисов, доказавшими чисто геометрически, что существует 230 типов пространственных решёток. В 1912 г. исследованиями кристаллов при помощи рентгеновских лучей была установлена реальность кристаллической решётки.

Каждая снежинка – это маленький кристалл замёрзшей воды. Форма снежинок может быть очень разнообразной, но все они обладают симметрией – поворотной симметрией 6-го порядка, и зеркальной симметрией.

Примеры «орнаментов» (розеток) можно найти в строении цветов. Соты пчел по форме являются правильным паркетом. Окраска многих змей напоминает «бордюры» и т. д. (приложение 18, 19).

VI. Математическое искусство Морица Эшера.

Среди современных художников в жанре «математического искусства» наиболее успешно выступает голландский художник Мориц Эшер[1].

«Я часто ощущаю большую близость к математикам, чем к коллегам-художникам», — писал сам Эшер. Ему же приписывают слова: «Все мои произведения — это игры. Серьезные игры». Его литографии, гравюры на дереве, меццотинто можно увидеть в кабинетах математиков и других ученых во всех уголках мира. Некоторые из его работ носят жутковатый, сюрреалистический оттенок, но произведения Эшера — это не фантасмагории Сальвадора Дали или Рене Магритта, а тонкие философские и математические наблюдения.

Рассмотрим некоторые из работ художника.
На литографии «Рептилии (приложение 21) маленькое чудовище выползает из шестиугольной мозаики, чтобы начать краткий цикл трехмерного бытия. Достигнув высшей точки, — взобравшись на додекаэдр, рептилия вновь возвращается в безжизненную плоскость.

На гравюре «День и ночь» (приложение 22*)* правая и левая части композиции не только зеркально симметричны, но и как бы служат своеобразными “негативами” одна другой. По мере того как наш взгляд перемещается снизу вверх, квадраты полей превращаются в белых птиц, летящих в ночи, и в черных птиц, летящих на фоне светлого дневного неба.

На круглой гравюре «Рай и ад» *(приложение 23)* фигуры ангелов и дьяволов, вплотную примыкая друг к другу, заполняют плоскость. При движении от центра гравюры к ее краю фигуры уменьшаются, превращаясь в бесконечное множество фигурок, невидимых невооруженным глазом на самом краю. Этот замечательный орнамент основан на вполне математической идее — известной евклидовой модели неевклидовой гиперболической плоскости, придуманной Анри Пуанкаре.

Может показаться, будто создание таких орнаментов — дело нетрудное, тогда рекомендуется попробовать свои силы и придумать хотя бы одну композицию!

Линия, разделяющая две смежные фигуры, выполняет двоякую функцию, и провести такую линию чрезвычайно сложно. Но ни человеческий глаз, ни человеческий разум не могут одновременно созерцать две вещи, поэтому происходит быстрое и непрерывное переключение внимания с того, что находится по одну сторону линии, на то, что находится по другую сторону от нее.

---

[1] *Мориц Эшер родился в 1898 г. в Голландии. В юности учился в Школе архитектуры и орнамента в Гарлеме. В течение 10 лет жил в Риме. Покинув Италию в 1934 г., Эшер провел 2 года в Швейцарии, 5 лет — в Брюсселе и затем поселился в голландском городе Барне, где жил до конца жизни. Обширную коллекцию работ Эшера собрал внук президента Теодора Рузвельта инженер Корнелиус Ван Шаак Рузвельт.*

О том, сколь многими способами фантастические орнаменты Эшера иллюстрируют различные аспекты симметрии, теории групп и кристаллографических законов написан целый научный труд - «Симметрийные аспекты периодических рисунков М. К. Эшера» Кролины Макгиллэври из Амстердамского университета.

Классический пример эшеровских абстракций, к которым часто обращаются в статьях о науке, — та самая картина «Регулярное разбиение плоскости рептилиями», из которой на литографии «Рептилии»   и вылезали драконы. Перенесемся из пространства в плоскость. Отвлечемся от многообразия форм и предположим, что в нашем распоряжении лишь одна из них — фигурка ящерицы. Но зато нам даны три цвета.

Можно ли такими фигурками, как паркетом, периодическим образом заполнить всю плоскость, без пробелов и наложений?

Чтобы ответить на такой вопрос для правильных многоугольников, хорошему ученику нужно подумать полчасика. И он обнаружит, что плоскость заполняется только правильными треугольниками, шестиугольниками и квадратами. Причем у шестиугольников отношение площади внутри многоугольника к его периметру максимально.

Эшер предлагает новый поворот классической темы. Если в руках творца есть цвет, то заполнение плоскости экзотическими фигурками, как показывает картина, может приобрести еще одну замечательную симметрию. Здесь, как в калейдоскопе, повернув картинку на 120 градусов и сменив цвета, ее можно перевести в себя!

Теория цветной симметрии, рассматривающая такие объекты, появилась намного позже этой гравюры. Может быть, исследователи, развившие этот раздел математики, увидели в ней намек на возможность построения будущей теории, предчувствие «ненаписанной симфонии»?

Разглядывая картинку с ящерицами трех цветов, можно было представлять, что мы парим над бесконечной однообразной плоскостью, где один кусок ничем не отличается от другого. Предположим, что нам дали огромное увеличительное стекло и мы смотрим на гравюру «Меньше и меньше» с одним *(приложение)*увеличением. Потом выбираем ее фрагмент вблизи центра и смотрим в еще более сильную лупу. И если мы каждый раз, как на этой гравюре, будем видеть одну и ту же или похожую картинку, значит, мы оказались в мире, одинаково устроенном на разных масштабах Глядя на фотографию такого мира, мы не можем определить, с каким увеличением она сделана. Это замечательное свойство, которое называют **масштабной инвариантностью**, характерно для огромного класса объектов, вошедших в науку в 80-х годах. Профессор Бенуа Мандельброт, сумевший увидеть их в разных областях от географии до химии и от космологии до ботаники, назвал их **фракталями.** Гравюра «Меньше и меньше» показывает типичный фрактальный объект.

Морис Эшер не был математиком и так и не получил не только математического, но вообще какого бы то ни было специального высшего образования. Может быть, потому и хватило ему дерзости, смелости воплотить в своих гравюрах то, что ученые-математики лишь обозначают в своих трудах на уровне общих моделей, концепций. Ему удалось показать. как выглядят эти умозрительные модели, отражаясь в нашем мире.

Заключение.

Математик, так же как
художник или поэт, создаёт
узоры. Г. Харди.

Восхищаясь рукотворной красотой орнаментов, воплощённых в предметах декоративно – прикладного искусства – коврах, гобеленах, вышивке, - я не задумывалась о роли геометрии в создании этих произведений. Между тем сочетание таланта мастера и его геометрических умений занимает важное место в орнаментальном искусстве.

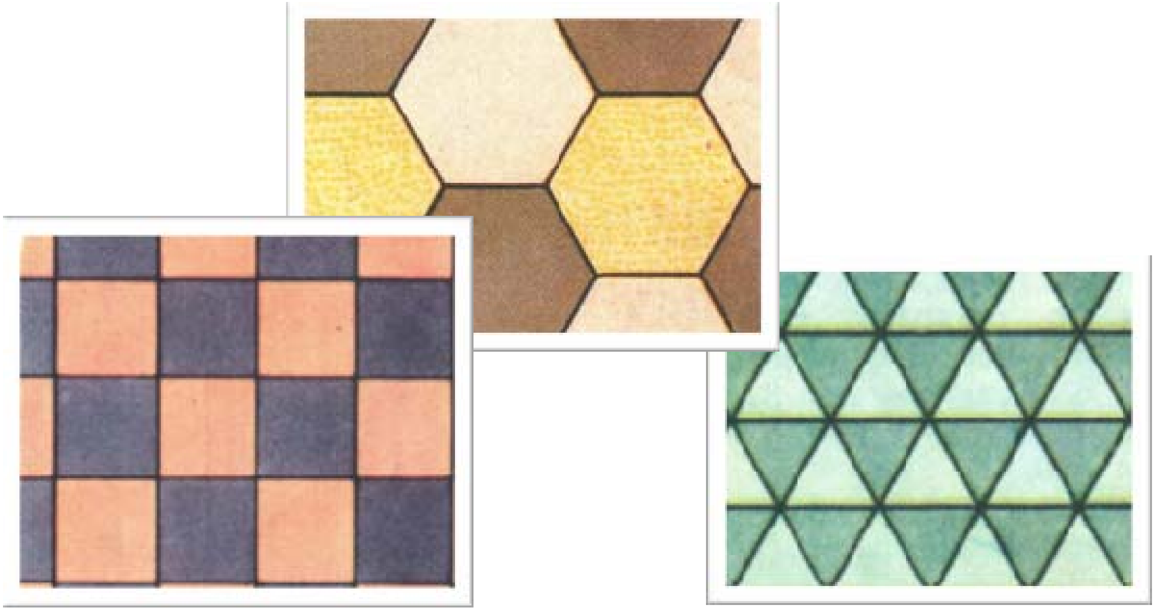
Таким образом в своей работе я изучить принципы построения орнаментов, Определила способы построения бордюров, классы симметрий. Определила геометрические преобразования, положенные в основу сетчатых орнаментов. Моя работа помогла мне раскрыться, помогла узнать то, о чем раньше даже и не подозревала. . Казалось, что придумать орнамент невероятно сложно. Конечно, без таланта здесь никак не обойтись. Но, и некоторые геометрические знания, и умения, которые я приобрела и отразила в своей работе, помогли мне овладеть ими.

Также, в своей работе я изложила истории и тайны древнейших орнаментов, их оригинальность и уникальность в построении. Выявила архитектурные и конструктивные особенности орнаментов разных национальных культур, определив характер композиции каждой эпохи и расположение орнамента на украшаемой поверхности. Орнамент – неизменный участник нашей повседневной жизни, вечный спутник, сопровождающий человечество на всех этапах его культуры. Мы видим его везде – на вещах, которые нас окружают, на нашей одежде. Это узоры на обоях и мебели, скатерти и коврах, посуде и тканях. Орнаментами, пышными и скромными, украшают фасады зданий

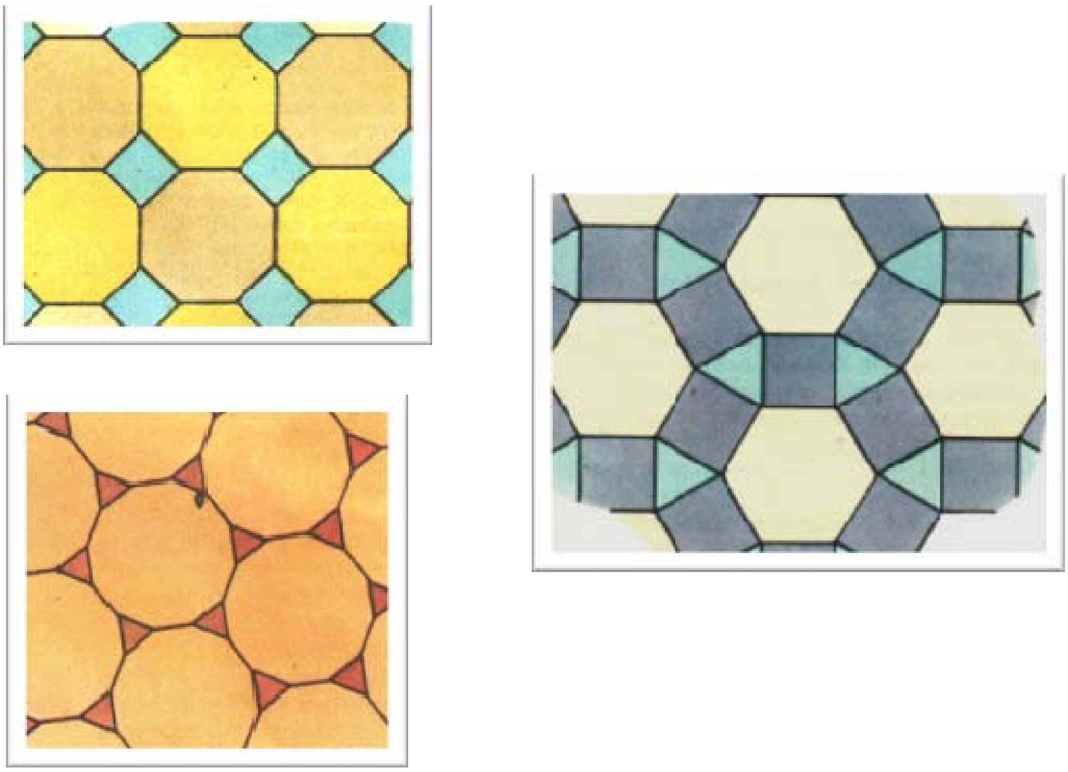
Я познакомилась с работами Морица Эшера.Переплетение искусства графики и математической теории симметрии в той форме, а которой оно представлено Морицом Эшером, явление уникальное. В его графике оказались заложенными глубокие принципы симметрии, которые были известны лишь кристаллографам. Скорее всего, творчество Эшера интересно математикам не только потому, что в его работах отображаются отголоски конкретных математических результатов, но и из-за того, что они имеют связь с общими математическими идеями.

Уверена, что мне неоднократно представится возможность использовать полученные при подготовке реферата знания об искусстве в области геометрии и геометрии в изобразительном искусстве в своей будущей профессии художника-проектировщика или профессии дизайнера.

Приложение 1

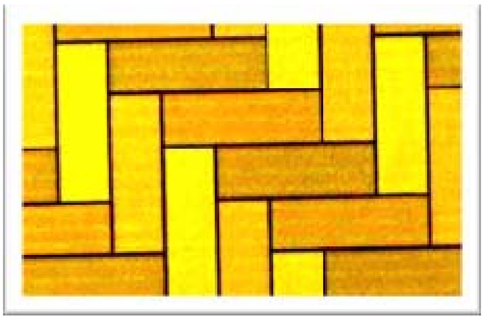


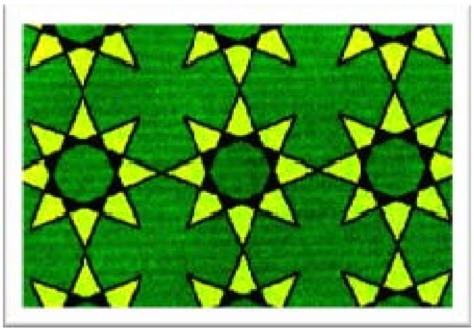
Одноименные паркета из правильных треугольников, квадратов, шести-угольников.



Паркеты из разных правильных многоугольников.

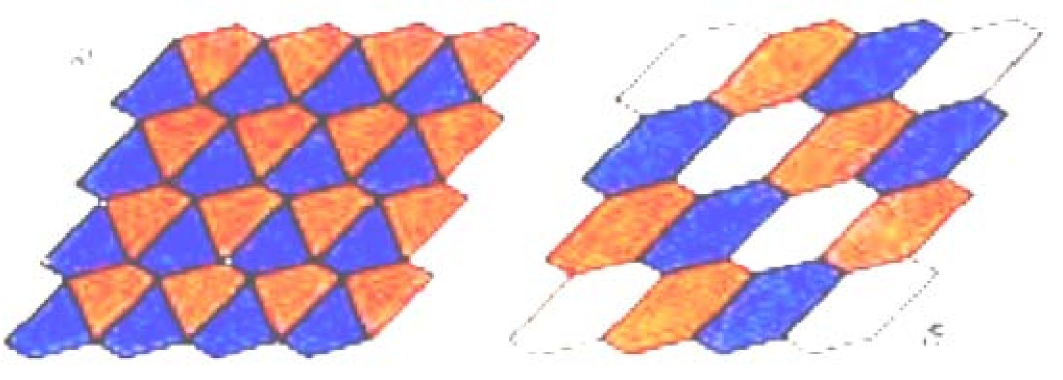
Приложение 2



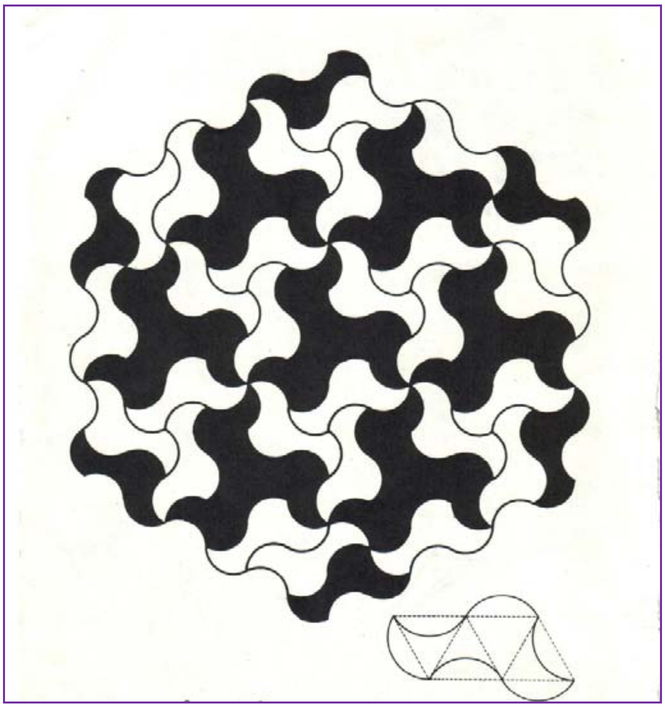


Примеры паркетов из неправильных многоугольников

Приложение 3



Паркеты из копий правильного многоугольника, правильные «по граням» называются планигонами



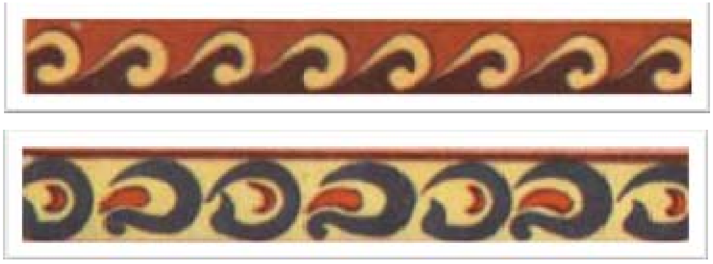
Паркет из криволинейных плиток получен деформацией обычного шести-угольного паркета из правильных шестиугольников

Приложение 4

.

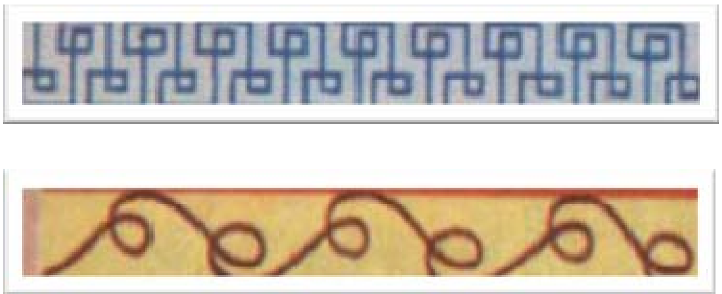
Спиральное замощение плоскости девятиугольниками, придуманное в 1936 году немецким математиком Х. Фодербергом

Приложени 5



Бордюры первого класса симметрии.

Бордюры второго класса симметрии.

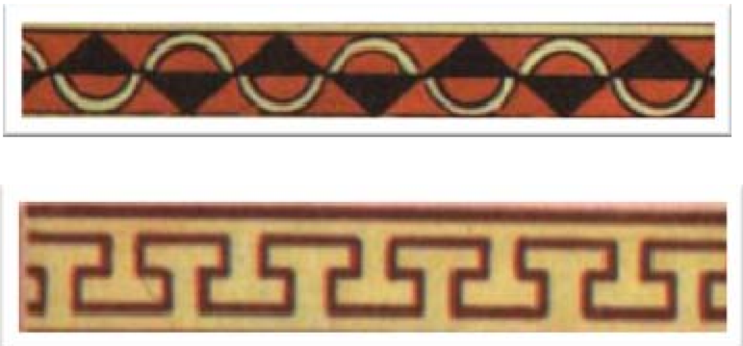


Бордюры третьего класса симметрии

Бордюры четвёртого класса симметрии

Приложение 6

Бордюры пятого класса симметрии

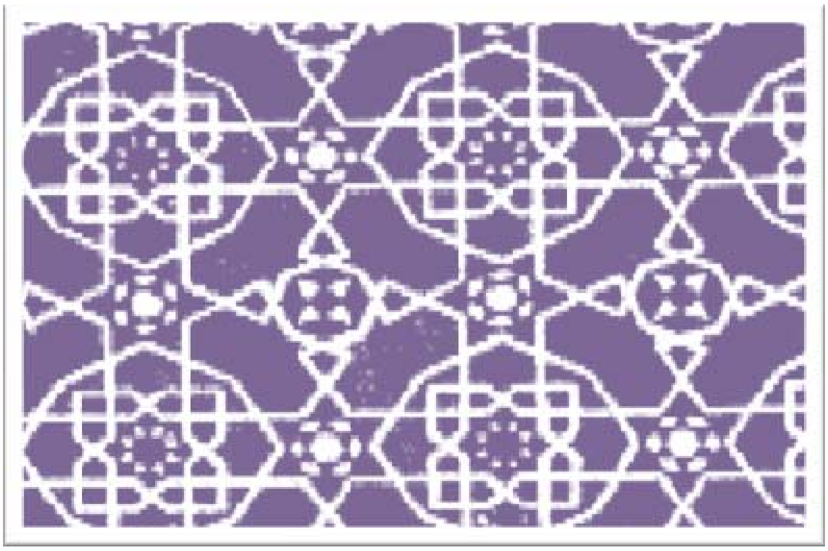


Бордюры шестого класса симметрии

Бордюры седьмого класса симметрии

Приложение 7

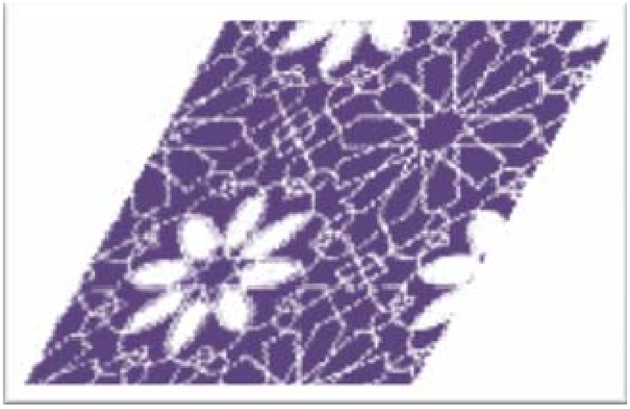
Типы плоских решеток.



Квадратная – a=b, α= 90^0

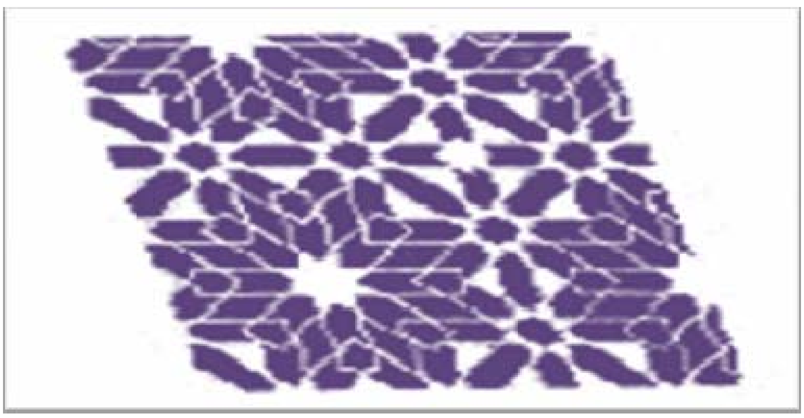
Прямоугольная - a≠b, α=90^0

Приложение 8



Гексальная - a≠b, $\alpha=60^0$

Ромбическая - a=b, $\alpha\neq90^0$, $\alpha\neq60$

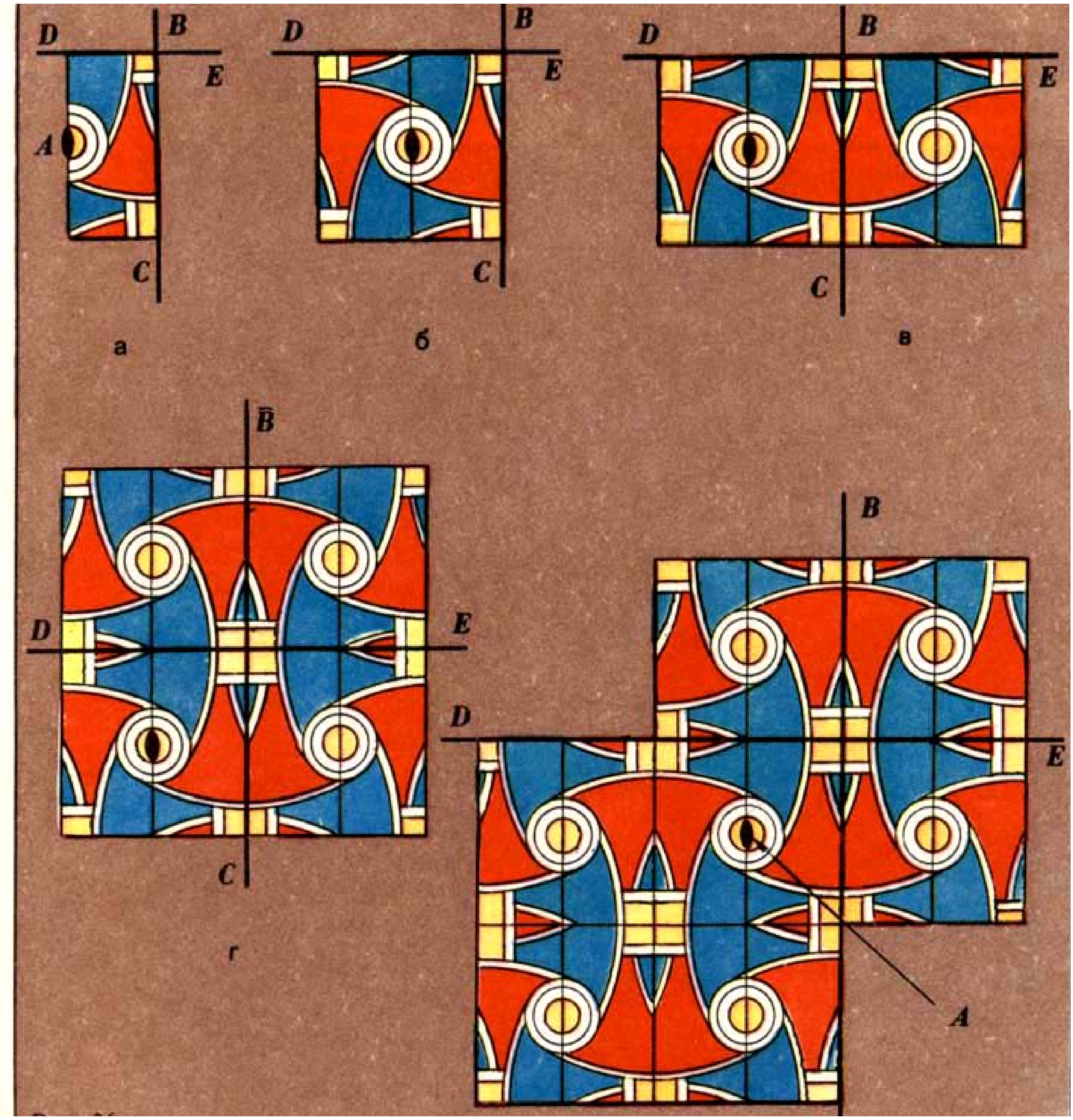


Косая - a≠b, $\alpha\neq90^0$

Приложение 9

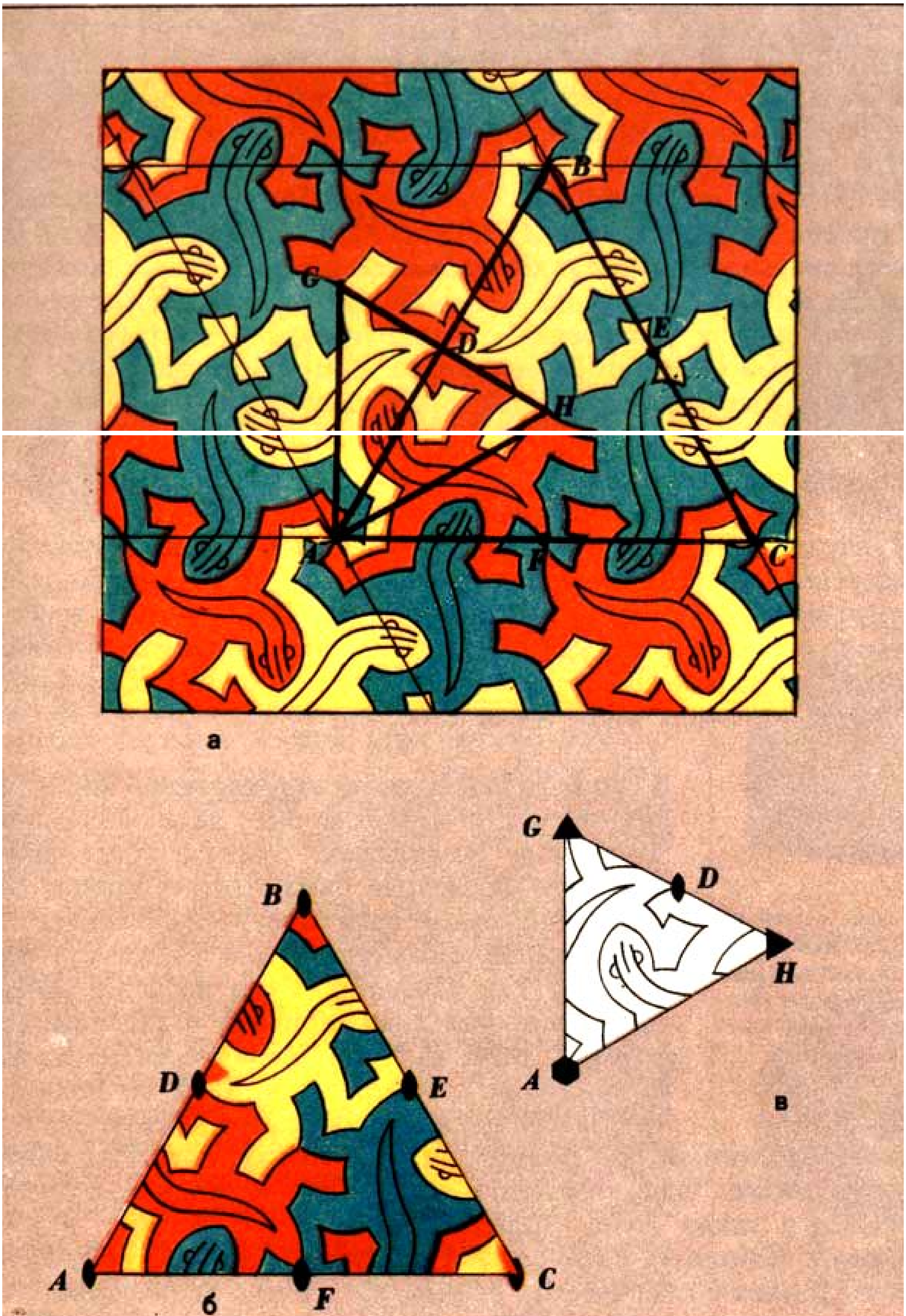
Орнамент «Летящие птицы»

Приложение 10



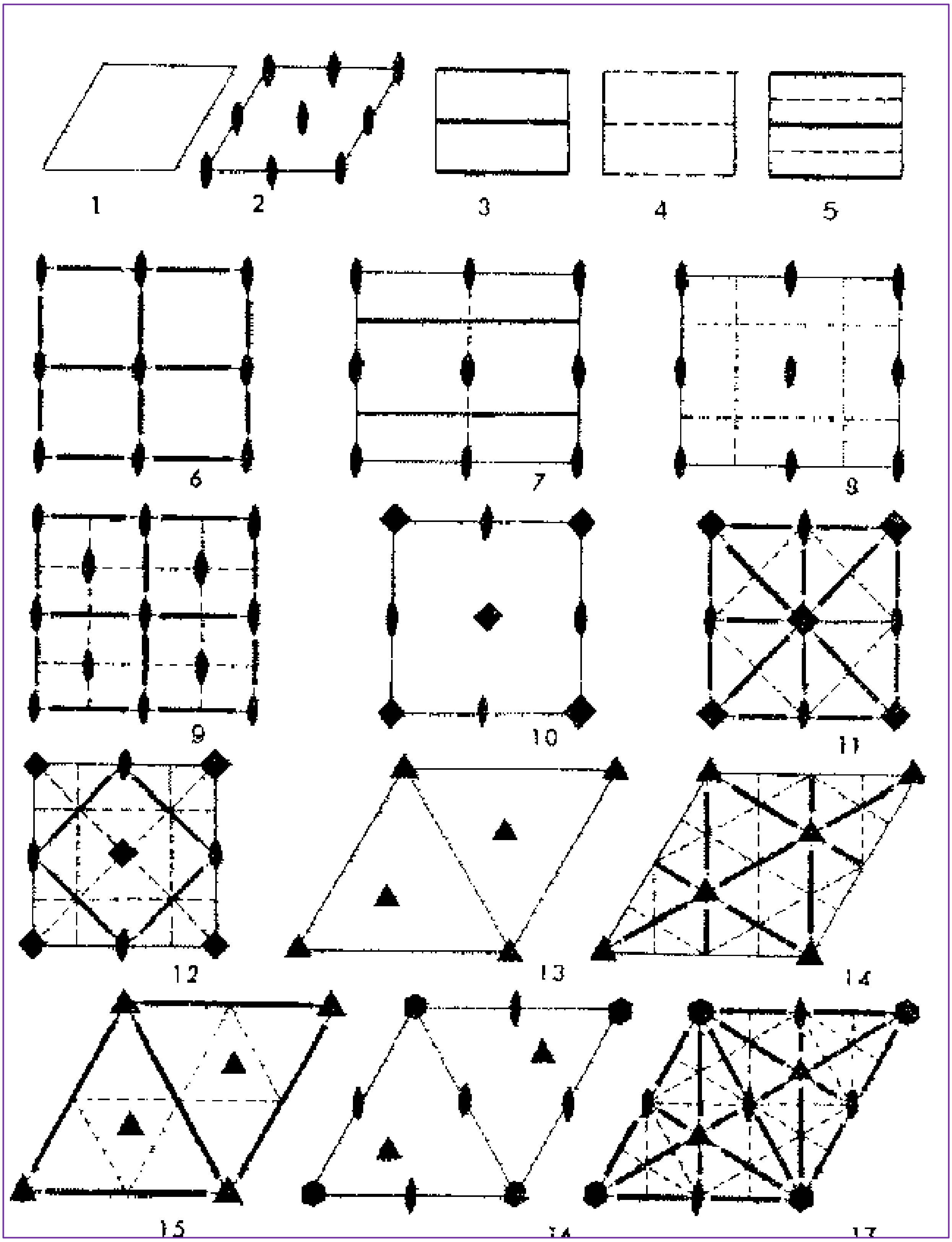
Египетский орнамент

Приложение 11



Орнамент «Ящерицы».

Приложение 12

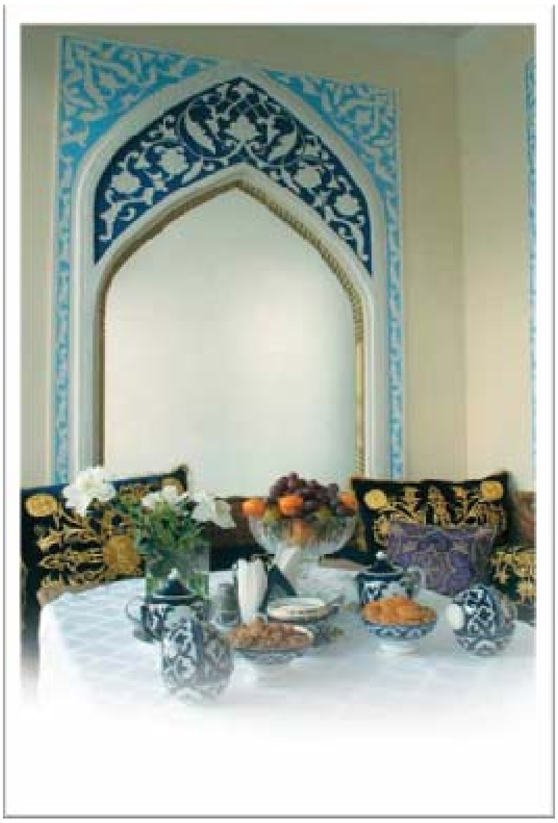


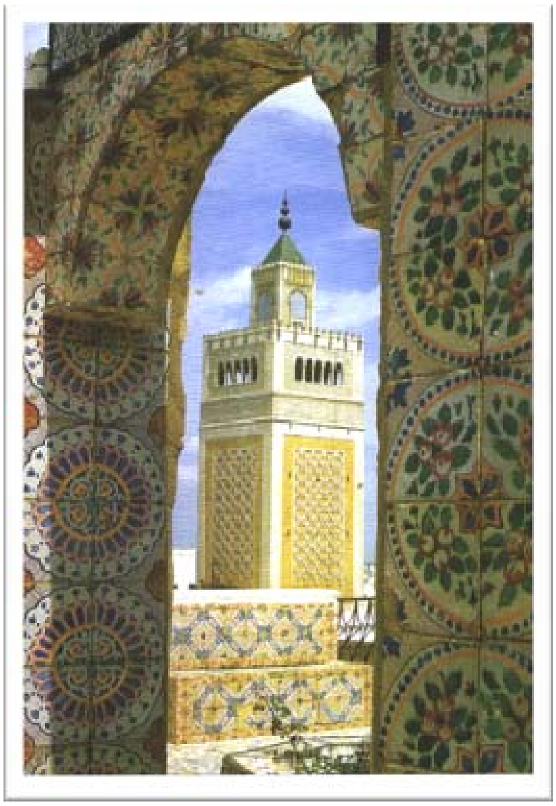
Типы симметрии плоских орнаментов

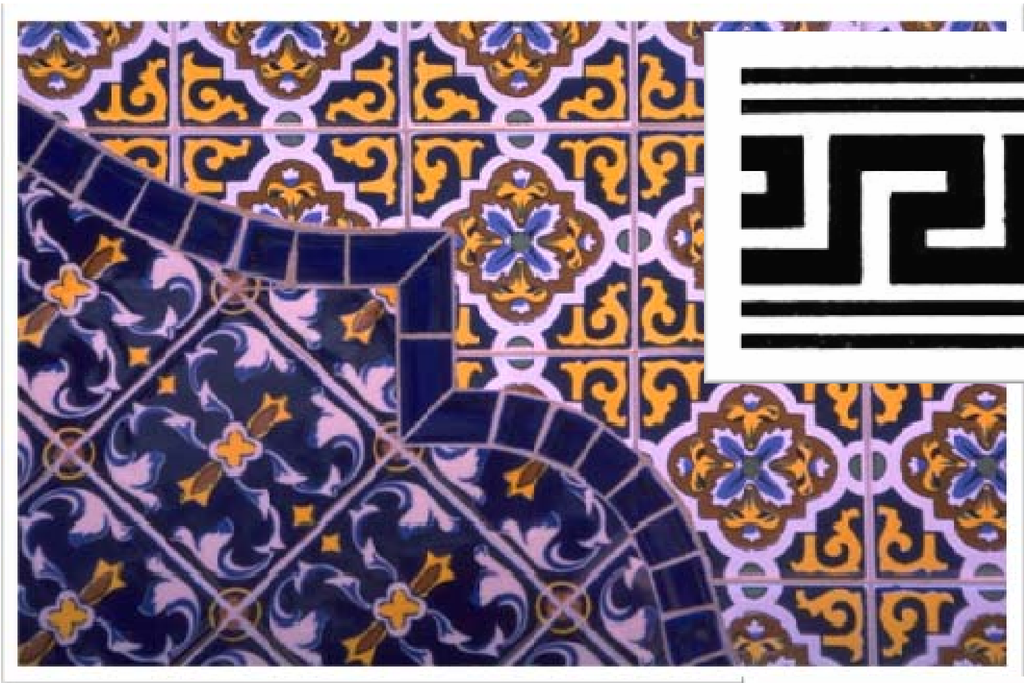
Приложение 13

Меандр

Приложение 14

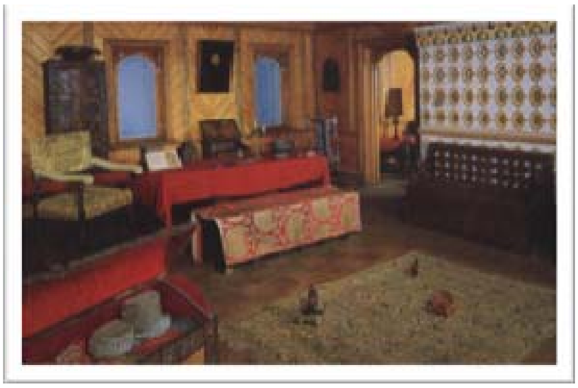






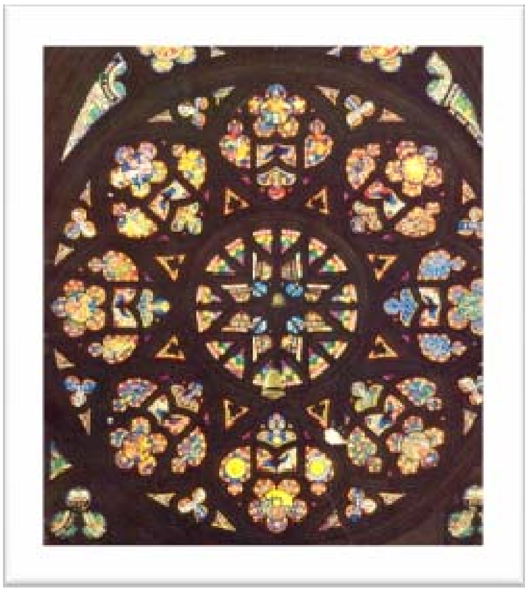
Орнаменты востока

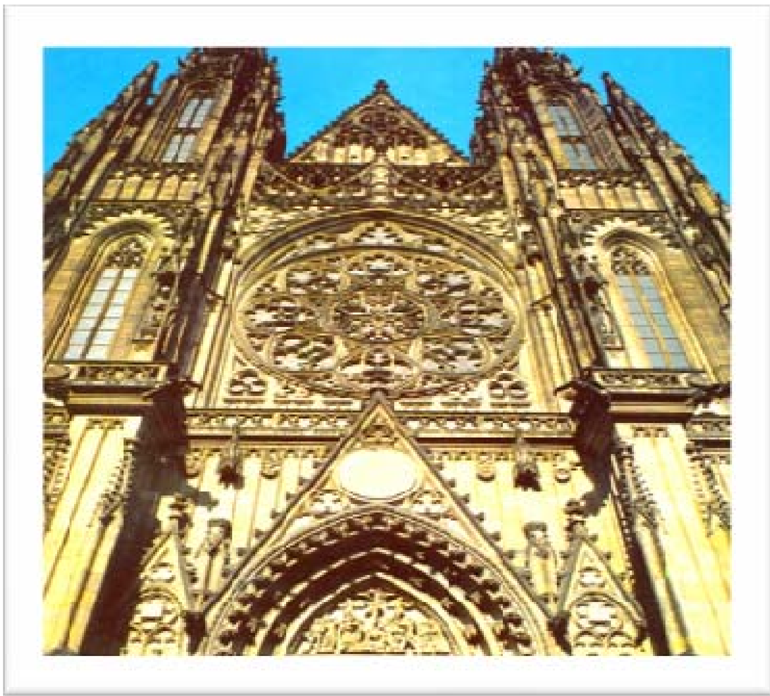
Приложение 15



Русский орнамент

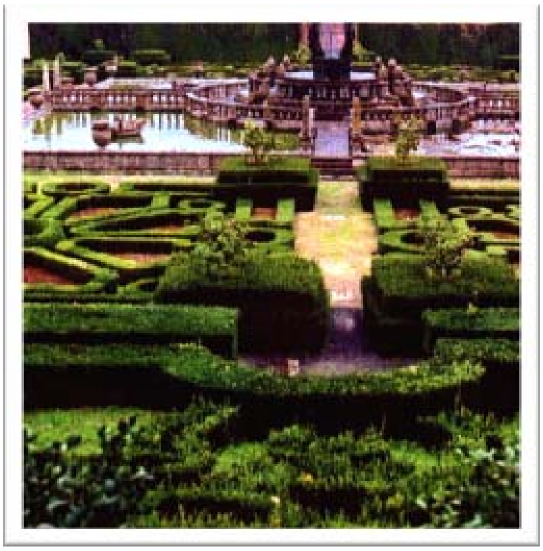
Приложение 16





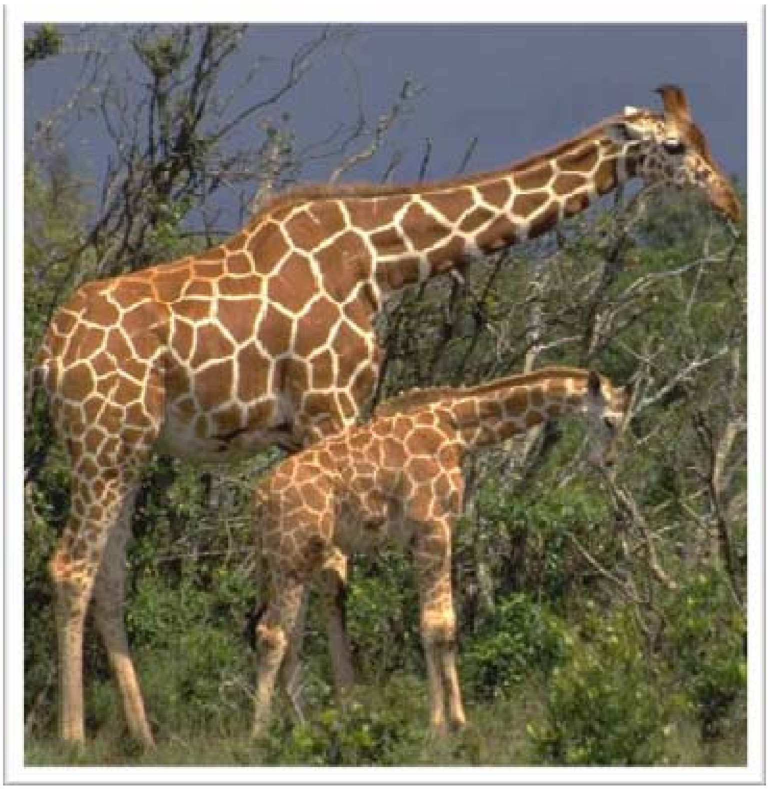
Готический стиль

Приложение 17



Орнаменты в ландшафтном дизайне

Приложение 18



Орнаменты в природе.

Приложение 19

Орнаменты в природе.

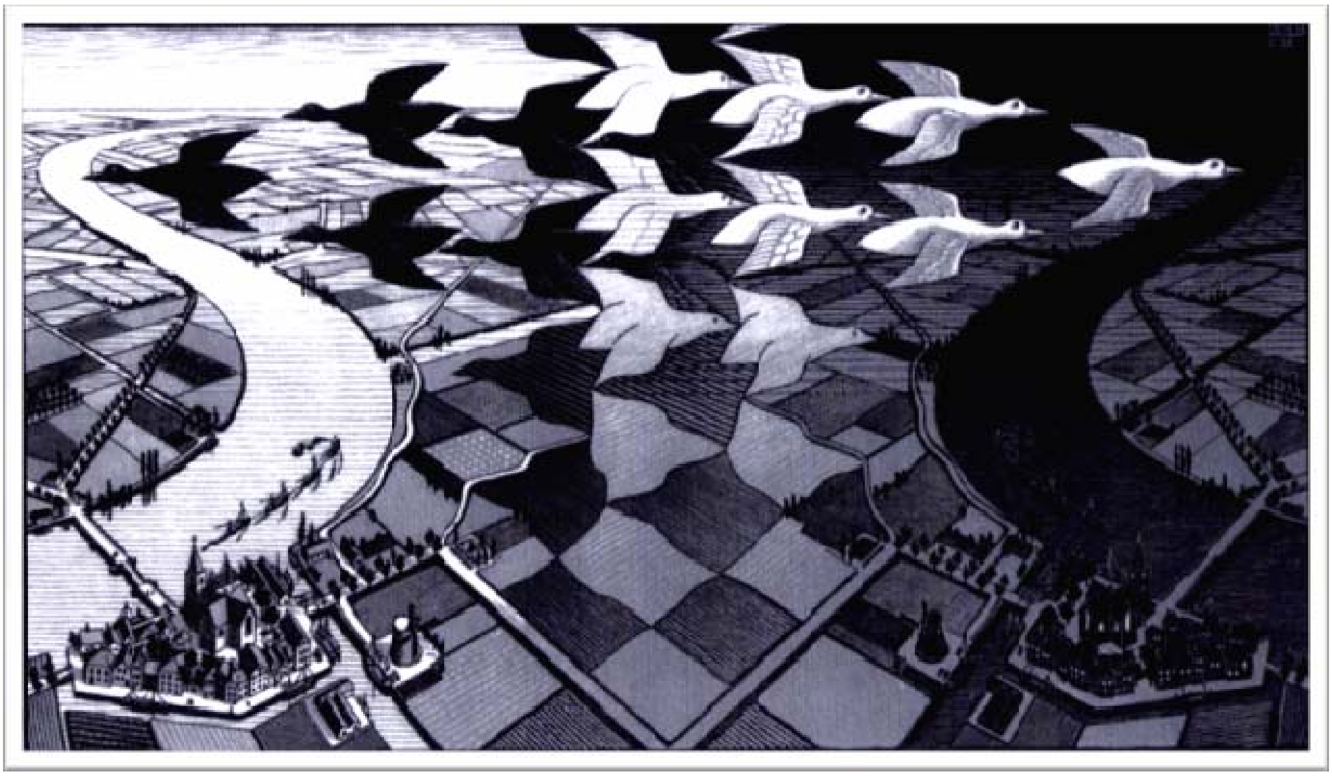
Приложение 20

Орнаменты вокруг нас

Приложение 21

Литография «Рептилии»

Приложение 22

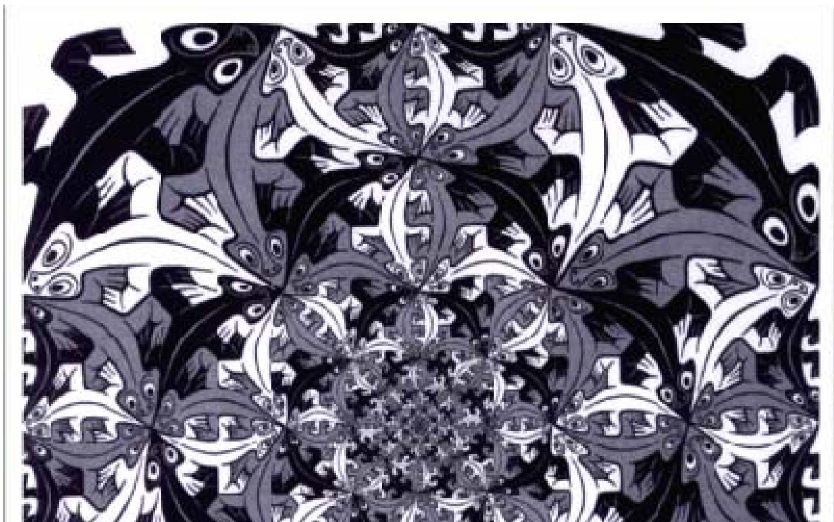


«День и ночь»

Рисунки М. К. Эшера

Приложение 23

«Рай и ад»



Гравюра «Меньше и меньше»