Министерство общего и профессионального образования
Свердловской области

Орган местного самоуправления
«Управление образования города Каменска-Уральского»
Муниципальное общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа № 4»

Научно-техническое направление

Звездчатые формы и соединения платоновых и архимедовых тел

Исполнитель:
Тихонов Александр,
учащийся 8 класса «А»
Руководитель:
Мокеева Л. А.
учитель математики,
высшая категория

Каменск-Уральский
2010

Содержание

Введение

1. Исследование звездчатых форм и соединений

2. Соединения платоновых тел

3. Звездчатые формы додекаэдра

4. Звездчатые формы икосаэдра

5. Звездчатые формы икосододекаэдра

6. Звездчатые формы кубооктаэдра

Заключение

Список литературы

Введение

Многогранники – тела, ограниченные плоскими многоугольниками. Среди многогранников выделяют правильные многогранники – те, которые построены из одинаковых многоугольников, причем в каждой вершине сходится одинаковое число таких многоугольников.

Еще в Древней Греции были описаны все правильные многоугольники. Их пять: тетраэдр, куб (гексаэдр), октаэдр, додекаэдр, икосаэдр. Эти многогранники носят название «платоновых тел».

Кроме правильных многогранников существует 13 полуправильных многогранников, которые носят название «архимедовых тел», поскольку он их первым описал. Это тела, составленные из многоугольников других видов, причем в каждой вершине сходится одно и тоже число многоугольников каждого вида. Примером такого многогранника является икосододекаэдр, состоящий из пяти- и шестиугольников.

Если использовать не только правильные многоугольники, но и звездчатые, разрешить им пересекаться, то можно получить очень красивые звездчатые правильные многогранники.

В 1809 году французский математик Пуансо построил 4 правильных звездчатых многогранника: малый звездчатый додекаэдр, большой додекаэдр, большой звездчатый додекаэдр, большой икосаэдр. Два из них знал Кеплер. В 1811 году Коши доказал, что кроме 5 «платоновых тел» и 4 тел Пуансо больше нет правильных многогранников.

В проекте «Звездчатые формы и соединения платоновых и архимедовых тел» рассмотрены различные звездчатые многогранники. Цель исследования выявить сходства и различия некоторых звездчатых форм и соединений платоновых и архимедовых тел.

Задачи исследования:

– познакомиться с новыми звездчатыми формами многогранников;

– исследовать сходства и различия звездчатых форм и соединений;

– изготовить шаблоны моделей для построения многогранников;

– изготовить модели по шаблонам.

1. Исследование звездчатых форм и соединений

Термин «звездчатый» имеет общий корень со словом «звезда», и это указывает на его происхождение. Чтобы разобраться в существе дела, обратимся к чертежам и моделям.

Если продолжить грани тетраэдра, то четыре плоскости – продолжения граней тетраэдра – ограничивают лишь ту часть трехмерного пространства, которая совпадает с исходным телом. Шесть плоскостей куба попарно параллельны и взаимно перпендикулярны, и новых частей к кубу не добавляют. Случай октаэдра дает интересные результаты. Восемь плоскостей отделяют от пространства новые части, внешние по отношению к октаэдру. Эти части – малые тетраэдры, основания которых совпадают с гранями октаэдра. Если мысленно присоединить эти части к октаэдру, то получим невыпуклый многогранник. Этот многогранник представляет собой соединение двух пересекающихся тетраэдров, центры которых совпадают с центром исходного октаэдра. Этот многогранник открыл Кеплер в 1619 г. и дал ему имя stella octangula.

Продолжать дальше грани не имеет смысла, потому что они не отделят никакой части пространства. Поэтому октаэдр имеет лишь одну звездчатую форму.

Если продолжить грани додекаэдра, то это приведет к образованию трех различных типов отсеков. Вблизи самого додекаэдра имеется 12 пятиугольных пирамид. Эти пирамиды превращают додекаэдра в малый звездчатый додекаэдр. За ними следуют 30 клинообразных отсеков, превращающих малый звездчатый додекаэдр в большой додекаэдр. Наконец 20 треугольных бипирамид (многогранник, образованный из 2 n-угольных пирамид, которые сложены равными основаниями) превращают большой додекаэдр в большой звездчатый додекаэдр. Эта завершающая форма додекаэдра, который имеет три такие формы: две из них были открыты Кеплером (1619), третья – Пуансо (1809).

Любая из звездчатых форм додекаэдра не является соединением платоновых тел, но образует новый правильный многогранник. В 1811 Коши доказал, что вместе с 5 правильными телами, известными еще древним ученым, 4 звездчатых многогранника являются правильными. Грани таких многогранников соединяются попарно в ребрах, но до этого они пересекаются в другими гранями. При этом

внутренние линии пересечения не считаются ребрами. Все эти свойства отчетливо прослеживаются на моделях звездчатых тел.

Икосаэдр имеет 20 граней. Если каждую их них продолжить неограниченно, то тело будет окружено многообразием частей пространства, ограниченных плоскостями граней. Все звездчатые формы икосаэдра можно получить добавлением к исходному телу таких частей. Не считая самого икосаэдра, продолжения его граней отделяют от пространства 20 + 30 + 60 + 20 + 60 + 120 + + 12 + 30 + 60 + 60 частей десяти различных форм и размеров.

Среди звездчатых форм икосаэдра встречаются некоторые соединения платоновых тел. Среди них: соединение пяти октаэдров, энантиморфные формы соединения пяти тетраэдров и соединение десяти тетраэдров.

При продолжении граней архимедовых тел теоретически можно получить сколь угодно много звездчатых форм. Далее приведены несколько звездчатых форм кубооктаэдра и икосододекаэдра.

2. Соединения платоновых тел

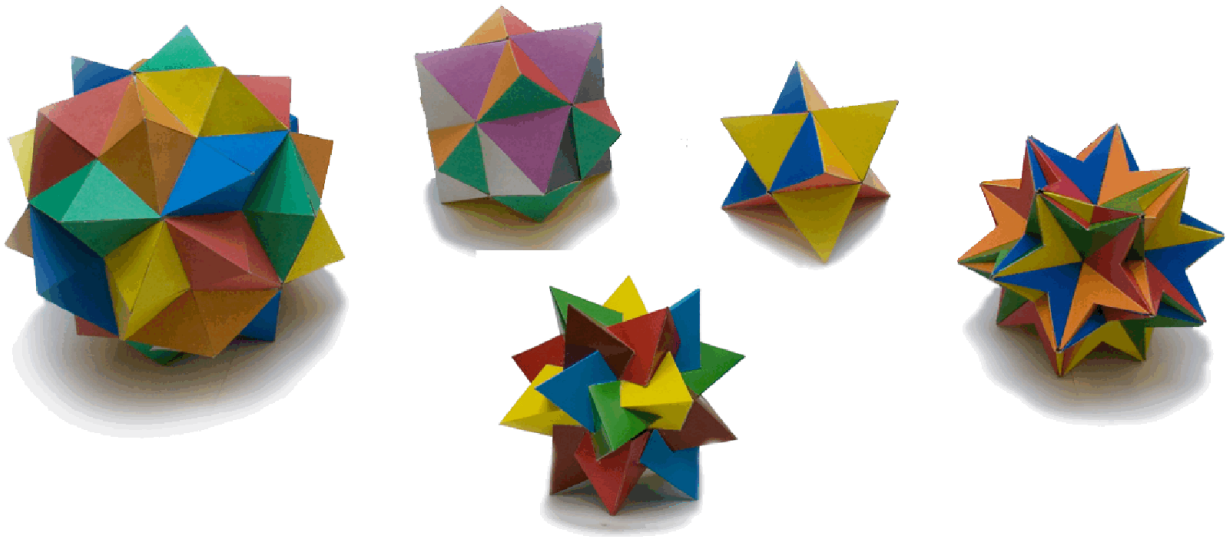

Рис. 1 – Соединения платоновых тел

Платоновыми телами являются тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр. Наиболее интересно мне было построить следующие соединения (рис. 1): звездчатый октаэдр, соединение куба и октаэдра, соединение пяти октаэдров, соединение пяти тетраэдров, соединение десяти тетраэдров. Каждая грань такого тела представляет собой правильный или равнобедренный треугольник. Но существуют и отличия:

– звездчатый октаэдр состоит только из правильных треугольников;

– соединение куба и октаэдра состоит из правильных и равнобедренных треугольников;

– соединение десяти тетраэдров состоит из треугольников и невыпуклых четырехугольников.

2.1. Звездчатый октаэдр

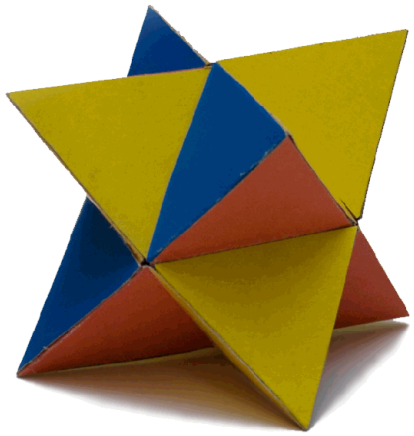

Рис. 2 – Звездчатый октаэдр

Для изготовления модели мне потребовались заготовки одного типа – одинаковые правильные пирамиды (рис. 3). Они подклеиваются таким образом, чтобы отсутствующие нижние основания образовывали как бы верхушку октаэдра.

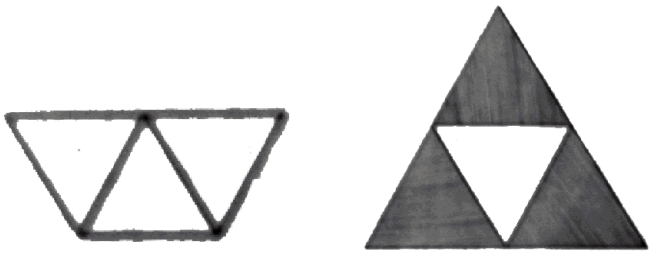

Рис. 3 – Шаблоны для изготовления модели

2.2. Соединение куба и октаэдра

Соединение куба и октаэдра (рис. 4) является первой звездчатой формой кубооктаэдра.

Исходные заготовки представляют собой треугольники двух разных типов, показанные штриховкой на чертежах граней (рис. 5). По четыре равносторонних треугольника соединяются в форме четырехугольной пирамиды без основания. Три равнобедренных прямоугольных треугольника образуют треугольную пирамиду без

основания. Шесть пирамид первого типа и восемь пирамид второго типа образуют модель.

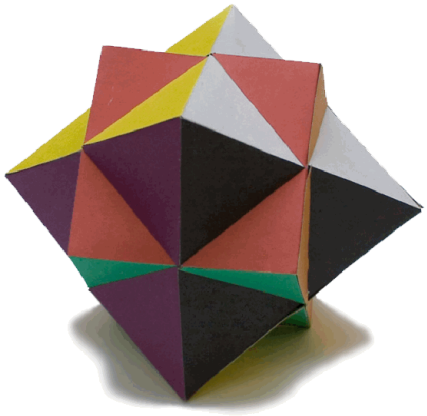

Рис. 4 – Соединение куба и октаэдра

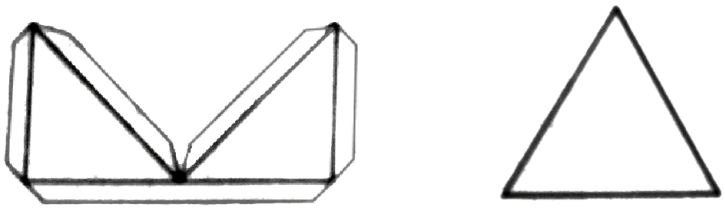

Рис. 5 – Шаблоны для изготовления модели

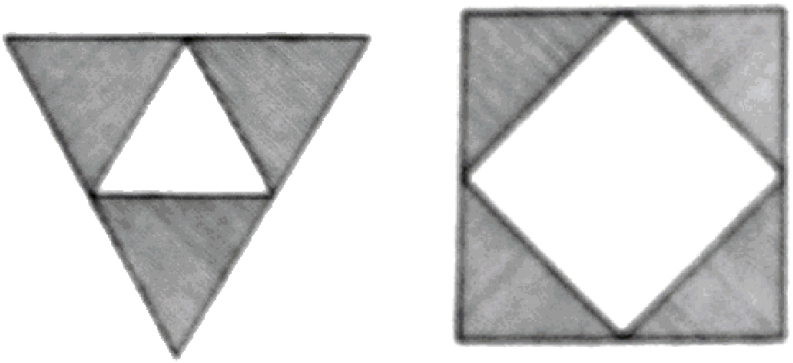

Рис. 6 – Сечение модели

2.3. Соединение пяти октаэдров

Каждая грань этого многогранника (рис. 7) образуют два равносторонних треугольника. Для изготовления модели мне понадобилось 30 копий заготовки, изображенной на рис. 8.

Прежде всего, каждой заготовке я придал вид четырехугольной пирамиды без ромбического основания – она служит вершиной одного из октаэдров. Затем склеил пять заготовок между собой. В промежутке между выступающими частями вклеил еще пять таких заготовок. Я их расположил таким образом, что короткие наклонные

ребра новых заготовок служат продолжениями ребер во впадинах исходного набора заготовок. Таким образом, ребро во впадине и короткое наклонное ребро новой заготовки будут лежать на одной прямой – ребре одного из октаэдров, образующих соединение.

Рис. 7 – Соединение пяти октаэдров

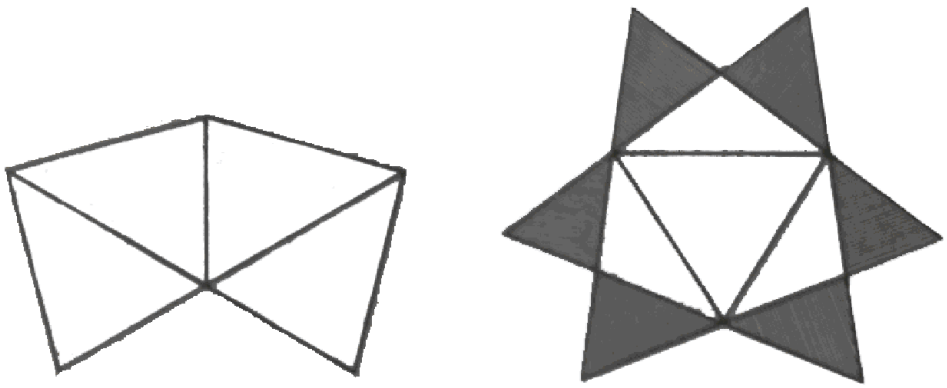

Рис. 8 – Шаблоны для изготовления модели

2.4. Соединение пяти тетраэдров

Ассиметричное и скошенное положение граней этого многогранника (рис. 9) придает ему необычайно привлекательный вид. Для изготовления модели мне потребовалось двадцать заготовок, представленных на рис. 10. Сначала я их соединил по три таким образом, чтобы всякий раз получался трехгранный угол с нижними зазубренными краями. Затем склеил между собой пять таких трехгранников. Получил кольцо из пяти трехгранников, причем в центре его, образующем впадину, оказались вершины всех пяти зубцов.

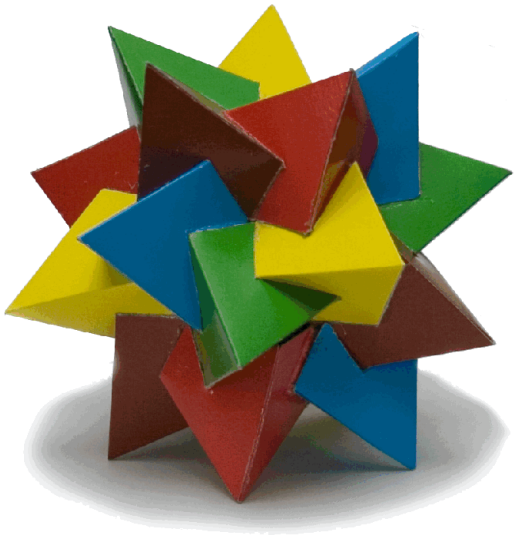

Рис. 9 – Соединение пяти тетраэдров

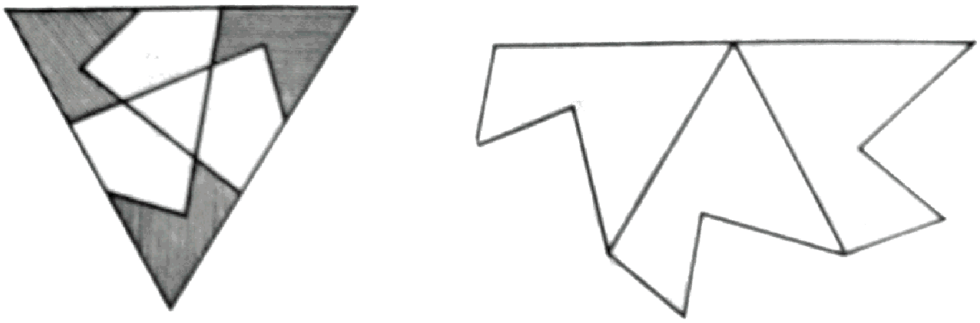

Рис. 10 – Шаблоны для изготовления модели

Центральные точки каждой впадины совпадают с вершинами внутреннего икосаэдра.

2.5. Соединение десяти тетраэдров

Рис. 11 – Соединение десяти тетраэдров

Эта модель (рис. 11) привлекла меня своей необычностью. Многогранник представляет собой комбинацию двух энантиоморфных форм соединения пяти тетраэдров. Для изготовления модели мне потребовались следующие заготовки, изображенные на рис. 12.

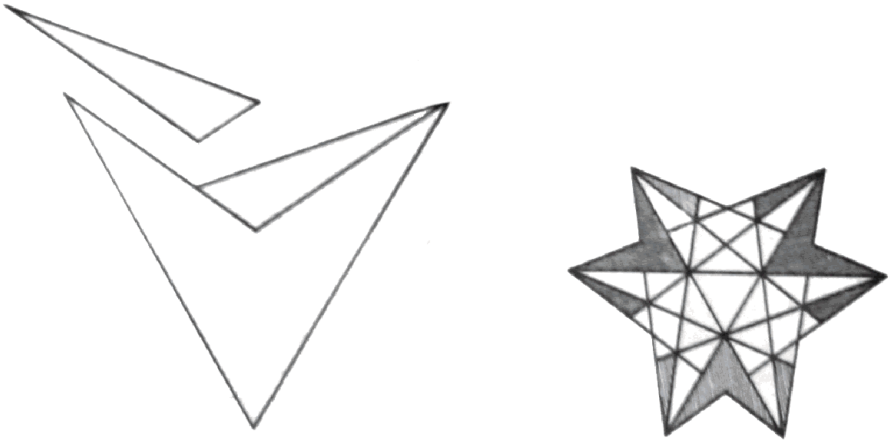

Рис. 12 – Шаблоны для изготовления модели

На каждой из них следует подрезать левую верхнюю сторону до вершины и отогнуть полученное треугольное крыло. К левой верхней стороне приклеивается крыло другого цвета, которое также отгибается наружу. Оба отогнутых крыла склеиваются между собой. При этом наклейка короткой стороны левого крыла непосредственно соединяется с внутренней поверхностью правого крыла. Оба крыла образуют половину чашеобразного желоба, или выемки, соединяющего между собой соседние части модели. Двенадцать таких частей соединяются между собой при помощи оставшихся наклеек. Так получается очень прочная и красивая модель.

3. Звездчатые формы додекаэдра

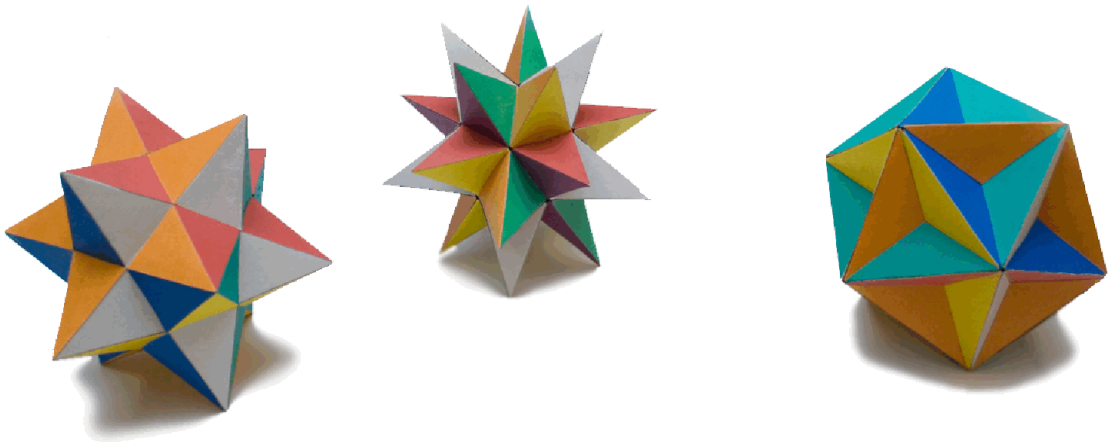

Рис. 13 – Звездчатые формы додекаэдра

Вершины таких многогранников совпадают с вершинами исходного икосаэдра. Грани большого и малого звездчатого додекаэдра представляют собой пентаграммы. Грани большого додекаэдра являются пересекающимися пятиугольниками. Наиболее интересно мне было построить следующие модели (рис. 13):

– малый звездчатый додекаэдр;

– большой звездчатый додекаэдр;

– большой додекаэдр.

3.1. Малый звездчатый додекаэдр

Этот многогранник (рис. 14) – одно из тел Кеплера-Пуансо. В качестве трафарета я использовал равнобедренный треугольник с углами 72°, 72° и 36°. Такой треугольник образует любой луч пятиконечной звезды – пентаграммы (рис. 15). Пять склеенных треугольников образуют часть модели, примыкающую к любой вершине.

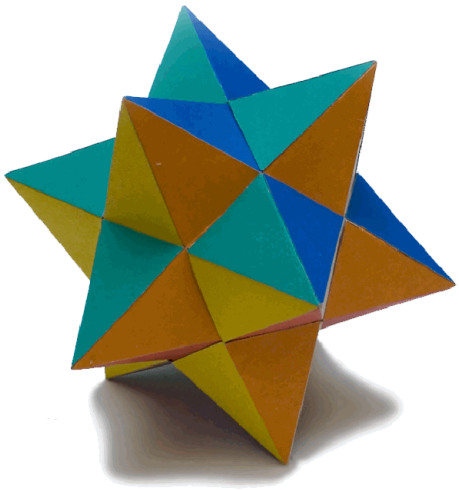

Рис. 14 – Малый звездчатый додекаэдр

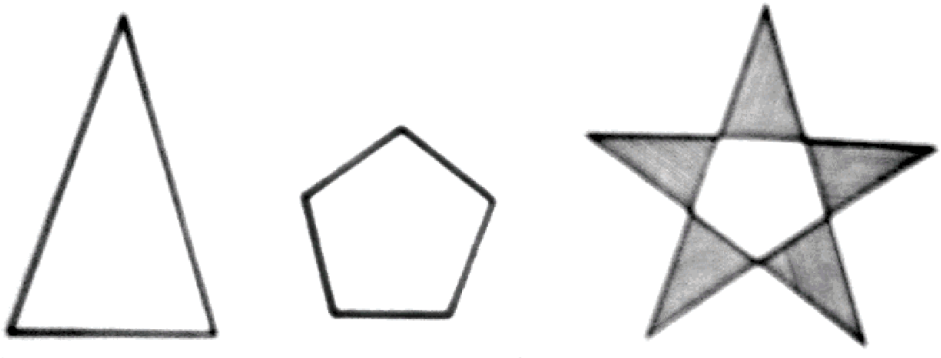

Рис. 15 – Шаблоны для изготовления модели

3.2. Большой додекаэдр

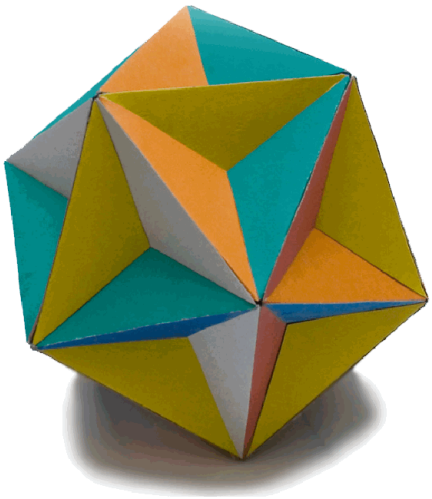

Рис. 16 – Большой додекаэдр

Этот многогранник (рис. 16) составлен из двенадцати пересекающихся пятиугольных граней. Для этой модели я использовал трафарет в виде равнобедренного треугольника с углами 36°, 36° и 108° (рис. 17). Проще всего соединить заготовки таким образом, чтобы получить 20 треугольных пирамид (вершинами вниз), а затем склеить пирамиды вместе.

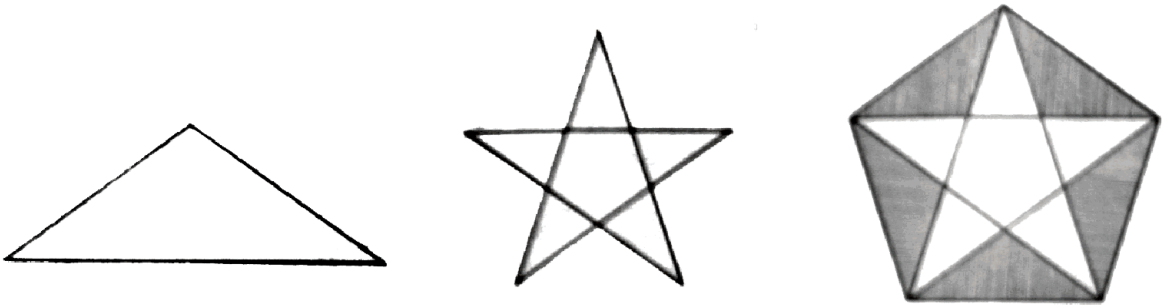

Рис. 17 – Шаблоны для изготовления модели

3.3. Большой звездчатый додекаэдр

Это последняя звездчатая форма правильного додекаэдра. В качестве трафарета я использовал равнобедренный треугольник с углами 36°, 72° и 72° – лучи пятиконечной звезды (рис. 19). Первые пять пирамид склеиваются между собой в кольцо. Их стороны дадут пятиугольник. Остающиеся части энантиморфны полученным и располагаются на диаметрально противоположных двойникам местах.

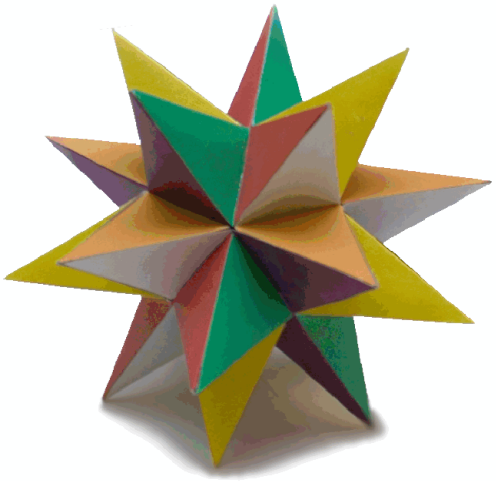

Рис. 18 – Большой звездчатый додекаэдр

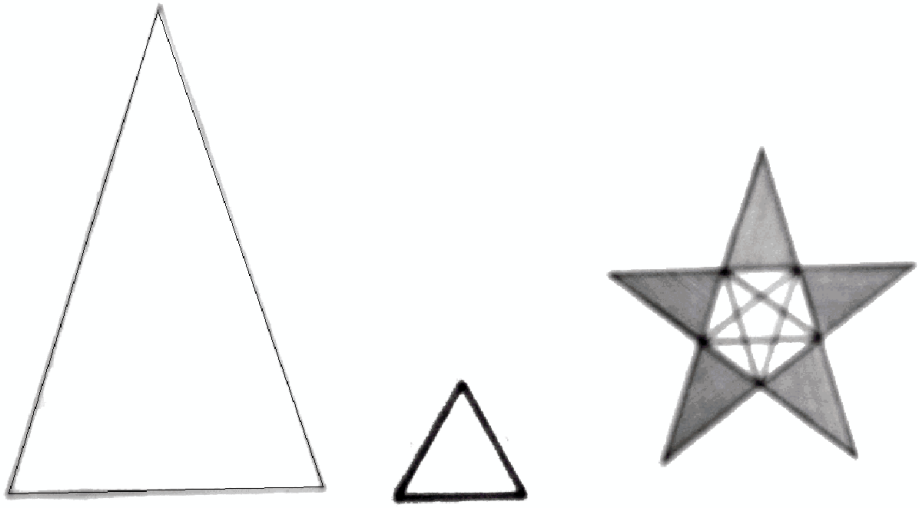

Рис. 19 – Шаблоны для изготовления модели

4. Звездчатые формы икосаэдра

Рис. 20 – Звездчатые формы икосаэдра

Мне было интересно построить следующие модели (рис. 20):

– первая звездчатая форма икосаэдра;

– вторая звездчатая форма икосаэдра;

– третья звездчатая форма икосаэдра;

– шестая звездчатая форма икосаэдра;

– седьмая звездчатая форма икосаэдра;

– девятая звездчатая форма икосаэдра;

– большой икосаэдр.

Эти многогранники можно разбить на две группы:

1) модели, вершины которых совпадают с вершинами исходного икосаэдра;

2) модели, вершины которых совпадают с вершинами исходного додекаэдра.

К первой группе относятся вторая, шестая девятая звездчатые формы икосаэдра, большой икосаэдр. Ко второй группе – третья и седьмая звездчатые формы икосаэдра.

4.1. Первая звездчатая форма икосаэдра

Рис. 21 – Первая звездчатая форма икосаэдра

Для этой модели (рис. 21) мне потребовалось 20 частей, которые склеиваются из показанных внизу заготовок (рис. 22). Каждая часть представляет собой невысокую треугольную пирамиду без основания.

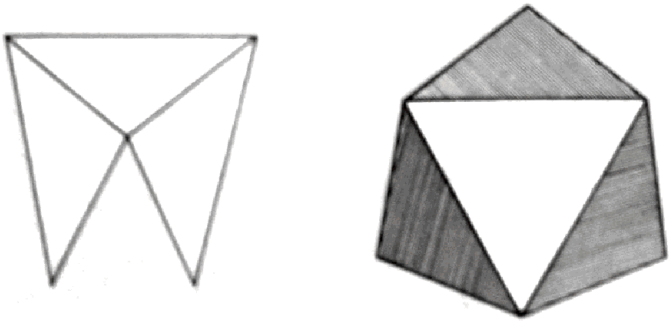

Рис. 22 – Шаблоны для изготовления модели

4.2. Вторая звездчатая форма икосаэдра

Рис. 23 – Вторая звездчатая форма икосаэдра

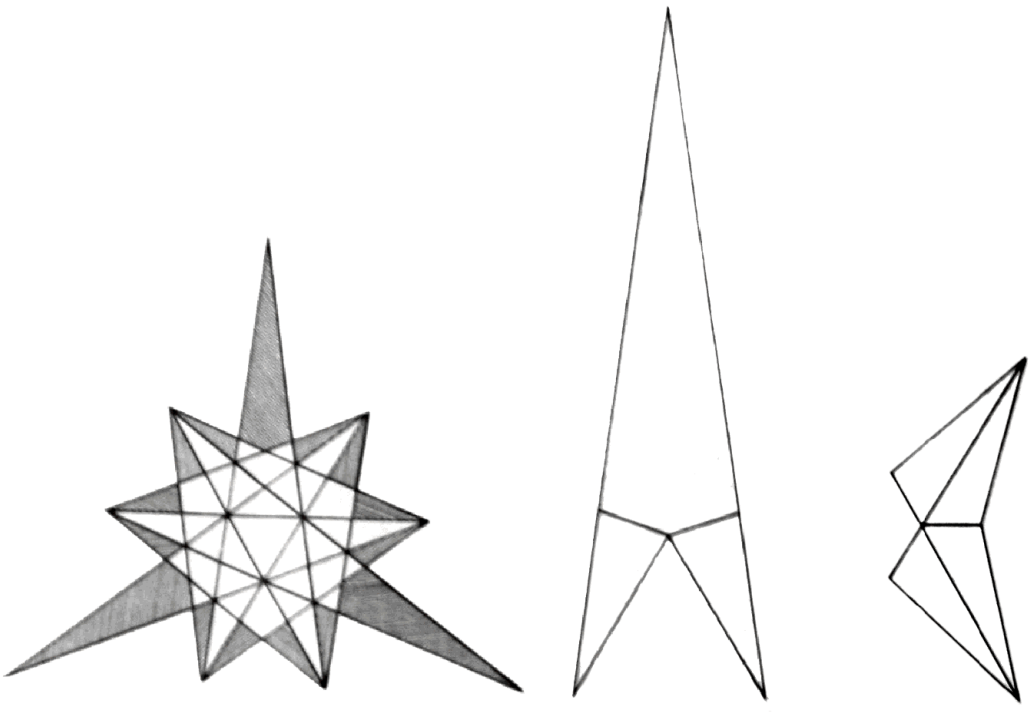

Рис. 24 – Шаблоны для изготовления модели

На этой очень красивой модели (рис. 23) заметны пятигранные высокие пики,

выступающие из впадин модели соединения десяти тетраэдров. На рис. 24 показаны симметричные трафареты для заготовок. Также представлена одна грань пятиугольного пика. Два малых треугольника внизу, отогнутые и склеенные вместе, образуют небольшой желобок. Пять таких заготовок склеиваются в пятиугольный пирамидальный пик, от основания которого отходит пять желобков. Другая заготовка во всем совпадает с частью заготовки, использованной мною ранее в модели десяти тетраэдров. Они служат связующими звеньями между разными пиками и подклеиваются между желобками.

4.3. Третья звездчатая форма икосаэдра

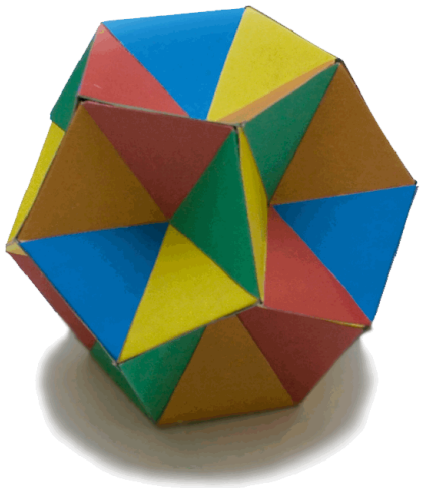

Рис. 25 – Третья звездчатая форма икосаэдра

Этот очень простой многогранник (рис. 25) принадлежит к семейству дельтаэдров. Для дельтаэдров характерно, что все из грани представляют собой равносторонние треугольники. Каждую грань этого звездчатого многогранника образуют три равносторонних треугольника. Сам многогранник внешне напоминает додекаэдр и даже содержит его ребра, но на самом деле является звездчатой формой икосаэдра. Его можно представить как додекаэдр с удаленными пятиугольными гранями, место которых заняли пятигранные впадины с правильными треугольными пирамидами.

На рис. 26 представлена развертка заготовки. Каждая пятигранная впадина образует одну часть: все части соединяются между собой.

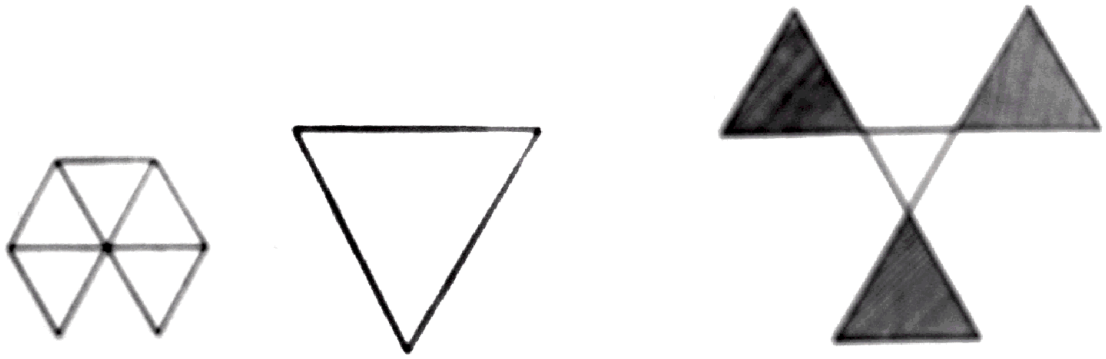

Рис. 26 – Шаблоны для изготовления модели

4.4. Шестая звездчатая форма икосаэдра.

Рис. 27 – Шестая звездчатая форма икосаэдра

На рис. 28 представлены шаблоны для изготовления модели. На ней легко обнаружить двенадцать длинных пиков, выступающих из впадин предыдущей модели. Построение модели я начал с соединения в кольцо пяти малых заготовок. Затем к кольцу добавляется пик. Двенадцать таких частей соединяются, как при модели додекаэдра. Эта простая модель, на мой взгляд, очень красива.

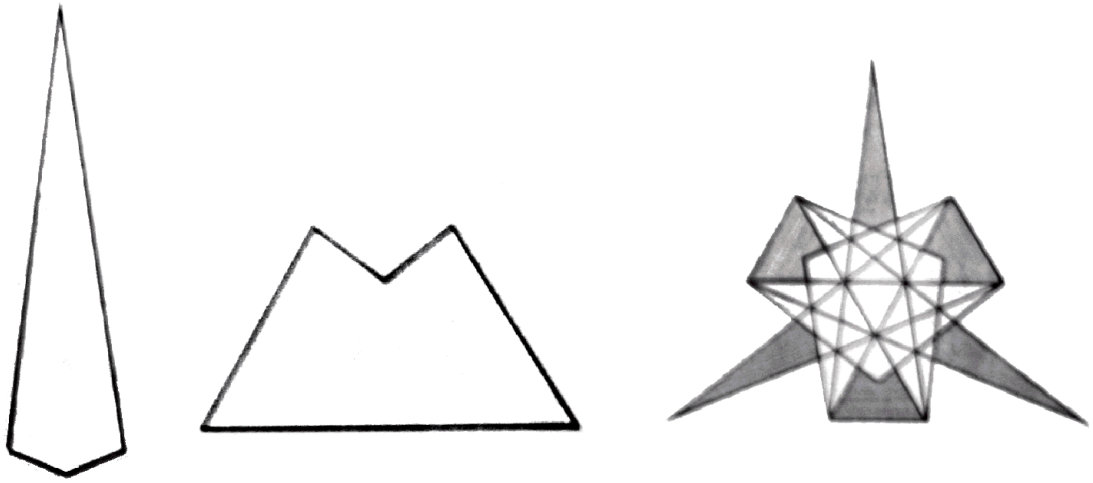

Рис. 28 – Шаблоны для изготовления модели

4.5. Седьмая звездчатая форма икосаэдра

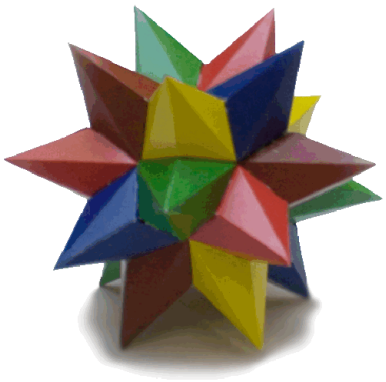

Рис. 29 – Седьмая звездчатая форма икосаэдра

Из заготовок, показанных на рис. 30, мне потребовалось сделать 20 частей модели, каждая из которых будет иметь форму шестигранного невысокого пика. Склеенные вместе, эти части образуют модель еще одной звездчатой формы икосаэдра.

Построение модели начинается с образования кольца из пяти частей. Эти части склеиваются таким образом, чтобы один острый угол в основаниях каждой части попал в центр кольца. После этого модель изготавливается как обычно.

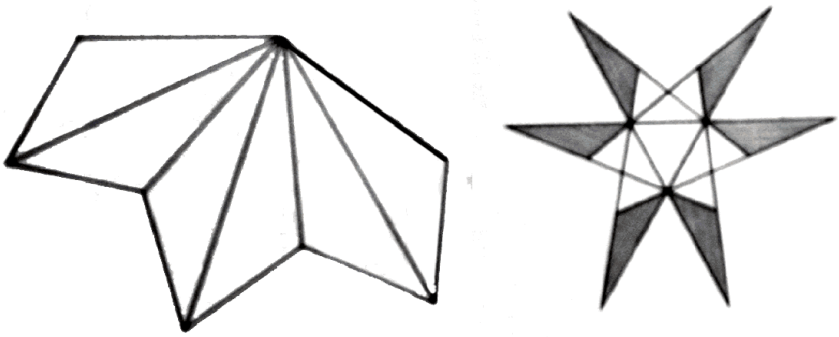

Рис. 30 – Шаблоны для изготовления модели

4.6. Девятая звездчатая форма икосаэдра

Рис. 31 – Девятая звездчатая форма икосаэдра

В показанной на рис. 32 заготовке легко узнать грань длинного пика модели. Сначала пикам придают обычную пятигранную форму. Затем все части соединяются между собой посредством наклеек на основаниях пиков.

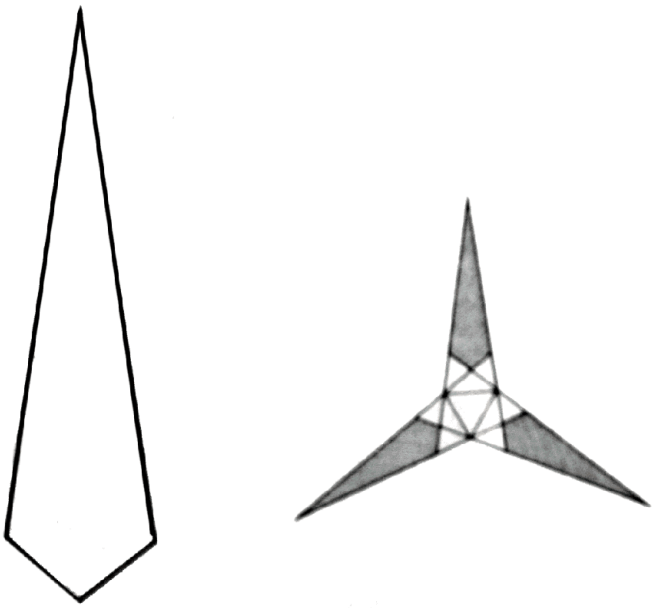

Рис. 32 – Шаблоны для изготовления модели

4.7. Большой икосаэдр

Рис. 33 – Большой икосаэдр

Из представленных ранее многогранников самым красивым и декоративным является большой икосаэдр (рис. 33), один из четырех правильных звездчатых многогранников Кеплера-Пуансо. Его вершины представляют собой центры правильных пятиугольных звезд, выступающих из тела модели.

Заготовка представлена на рис. 34. Каждая часть состоит из пяти пар

заготовок, соединенных в своеобразный веер. Его следует перегнуть на манер гармошки так, чтобы вниз опустились внутренние ребра каждой пары, а соседние ребра разных пар приподнялись. Склеив свободные ребра, получим вершинную часть модели.

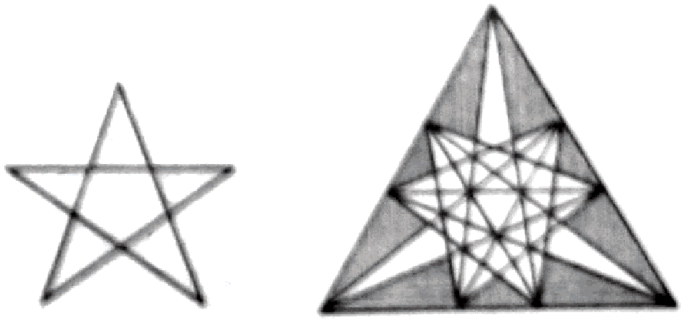

Рис. 34 – Шаблоны для изготовления модели

5. Звездчатые формы икосододекаэдра

Данные модели (рис. 35) являются соединениями двух платоновых тел: икосаэдра и додекаэдра. Наиболее красивыми мне показались следующие многогранники:

– первая звездчатая форма икосододекаэдра;

– седьмая звездчатая форма икосододекаэдра;

– десятая звездчатая форма икосододекаэдра;

– тринадцатая звездчатая форма икосододекаэдра.

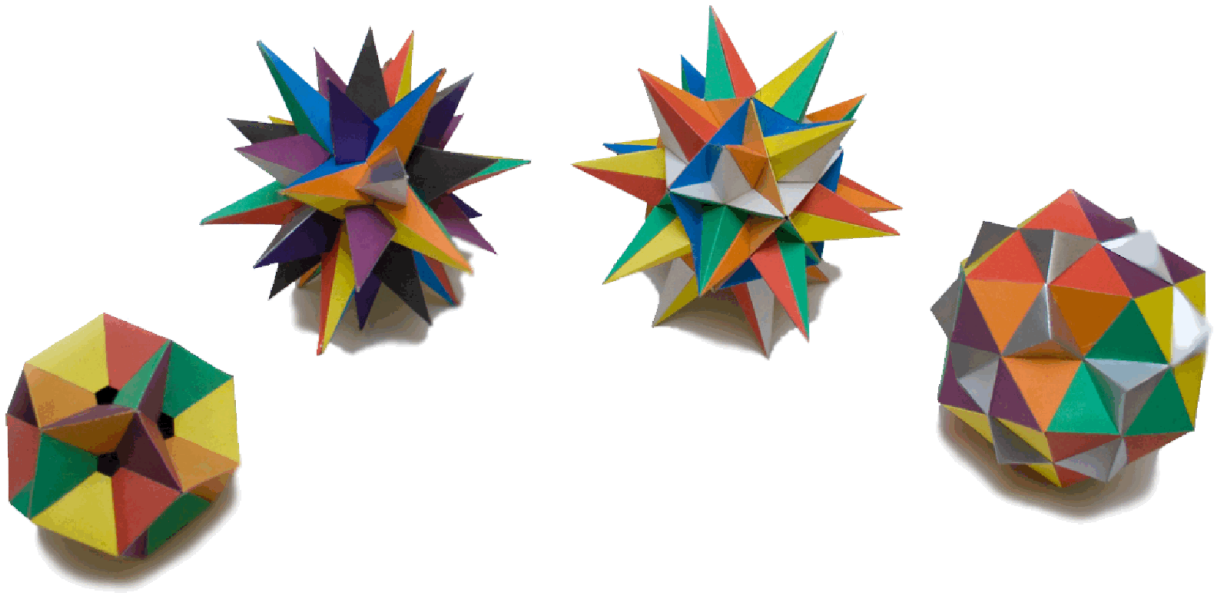

Рис. 35 – Звездчатые формы икосододекаэдра

5.1. Первая звездчатая форма икосододекаэдра

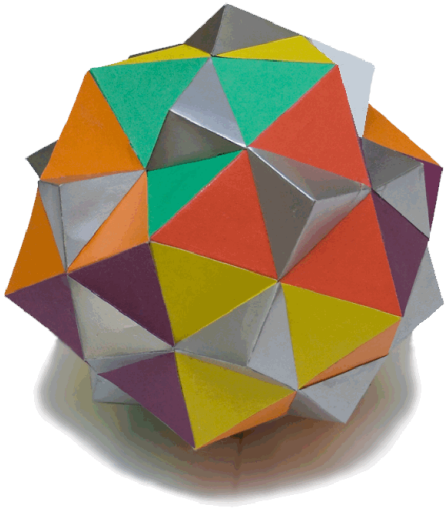

Рис. 36 – Первая звездчатая форма искосододекаэдра

Двенадцать невысоких пятиугольных пирамид и двадцать маленьких треугольных пирамид закрывают внутренний икосододекаэдр. На рис. 37 представлены развертки обоих пирамид. Их надо склеивать между собой тем же способом, что и при изготовлении любой выпуклой модели.

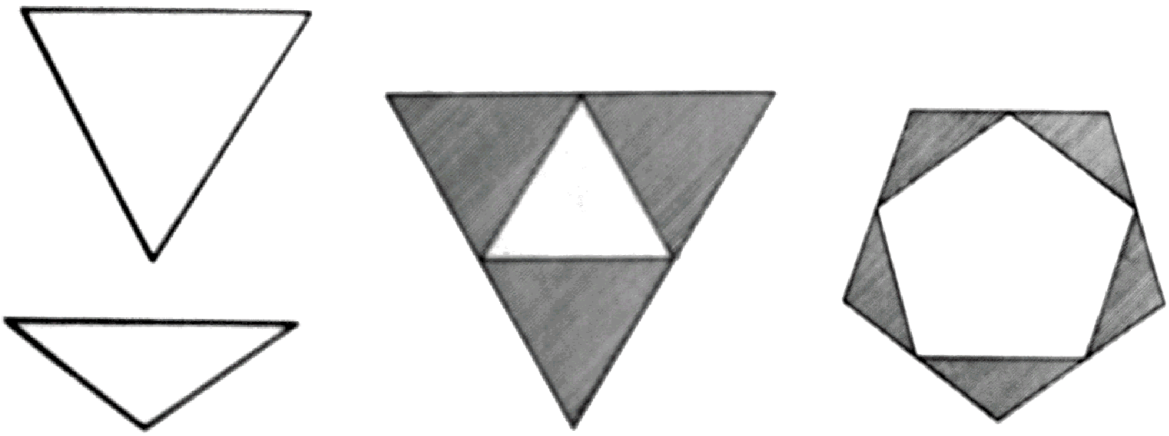

Рис. 37 – Шаблоны для изготовления модели

5.2. Седьмая звездчатая форма икосододекаэдра

Многогранник (рис. 38) представляет собой соединение большого додекаэдра и седьмой звездчатой формы икосаэдра. Для построения модели я изготовил впадины большого додекаэдра, содержащие большое шестиугольное отверстие в центре (рис. 39). Затем выполнил шестигранные пики, грани которых видны на икосаэдральной грани. Пики вклеиваются во впадины, закрывая отверстия. Полученные части соединяются, как части большого додекаэдра.

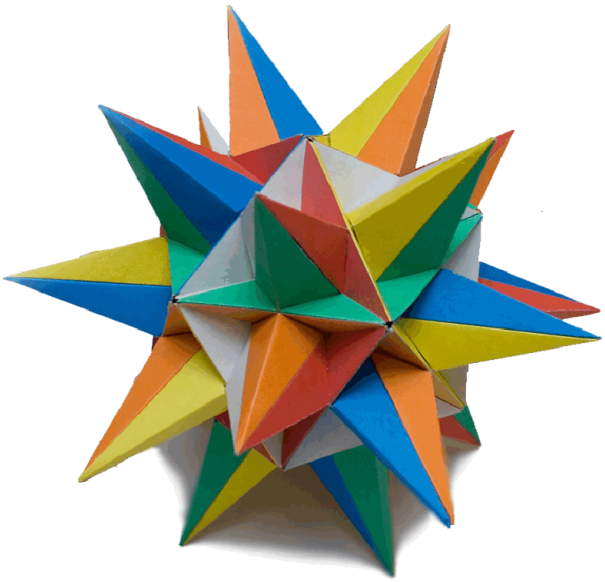

Рис. 38 – Седьмая звездчатая форма икосододекаэдра

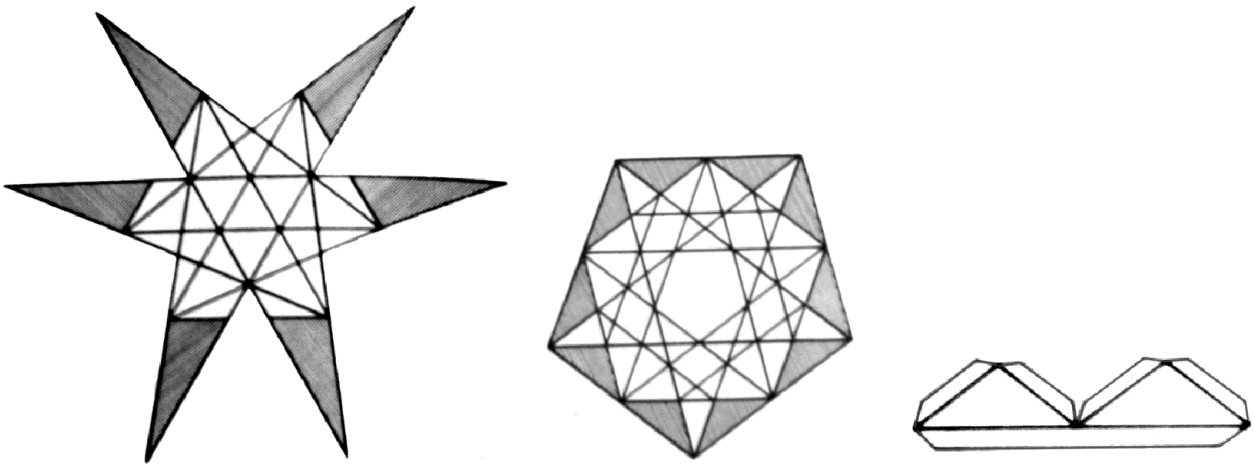

Рис. 39 – Шаблон для изготовления модели

5.3. Десятая звездчатая форма икосододекаэдра

Этот простой многогранник (рис. 40) внешне напоминает одну из звездчатых форм икосаэдра. Но в данном случае отверстия в центрах впадин дельтаэдра, через которые видно нутро тела, обязаны своим происхождением малому звездчатому додекаэдру (вершинные части малого звездчатого додекаэдра выступали бы из этих отверстий).

Одна часть модели состоит из двух усеченных треугольников, соединенных по самой длинной стороне, и двух равнобедренных трапеций, которые в итоге образуют часть внутренней поверхности модели. Вся модель изготовлена из 30 частей (рис. 41).

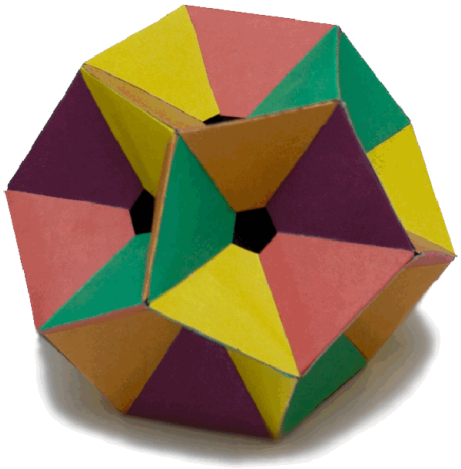

Рис. 40 – Десятая звездчатая форма икосододекаэдра

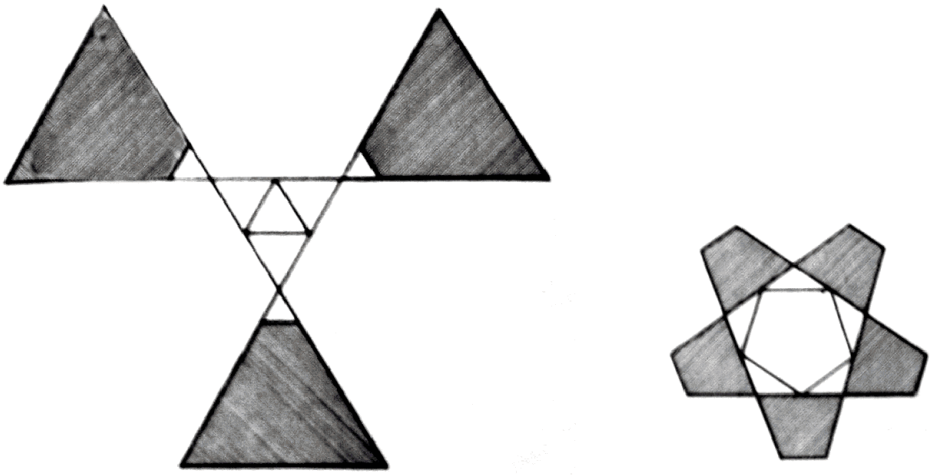

Рис. 41 – Шаблоны для изготовления модели

5.4. Тринадцатая звездчатая форма икосододекаэдра

Рис. 42 – Тринадцатая звездчатая форма икосододекаэдра

В этой модели (рис. 42) большой звездчатый додекаэдр пронизан телом одного из звездчатых икосаэдров. Поэтому двенадцать и тридцать вершинных пиков кажутся как бы выступающими из основного ядра модели. Прежде всего, я изготовил вершинные пики обоих видов, а затем подклеил их друг к другу. Окружил один икосаэдральный пик кольцом из пяти додекаэдральных пиков.

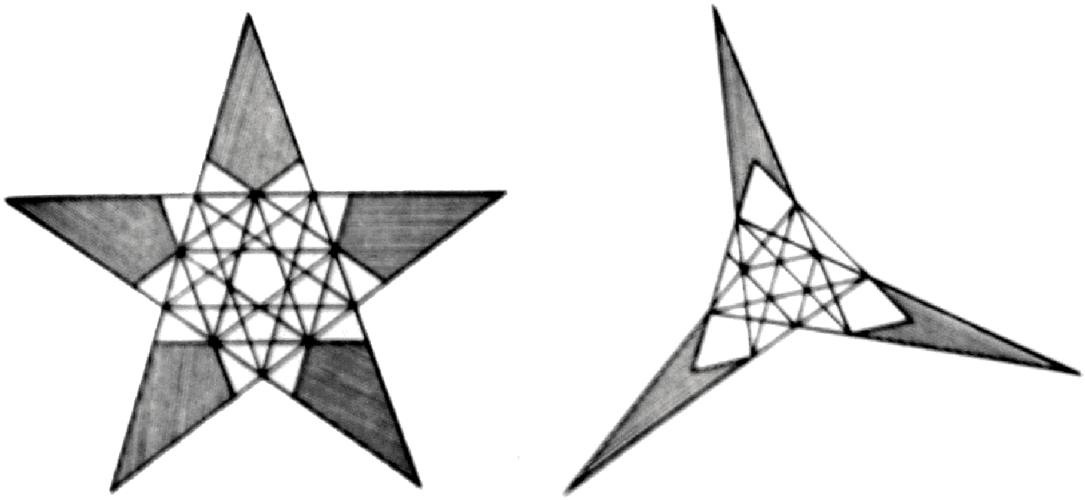

Рис. 43 – Сечения модели

6. Звездчатые формы кубооктаэдра

Данные звездчатые формы представляют собой еще один пример соединения платоновых тел: куба и октаэдра. Мною построены: третья звездчатая форма кубооктаэдра и завершающая звездчатая форма кубооктаэдра (рис. 44). Первый многогранник состоит из правильных треугольников и квадратов, а второй из невыпуклых шестиугольников и ромбов.

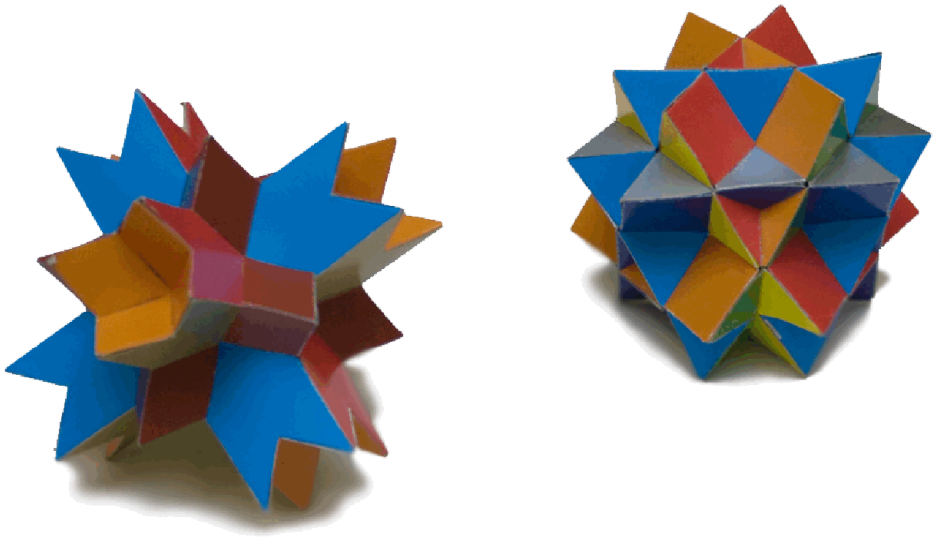

Рис. 44 – Звездчатые формы кубооктаэдра

6.1. Третья звездчатая форма кубооктаэдра

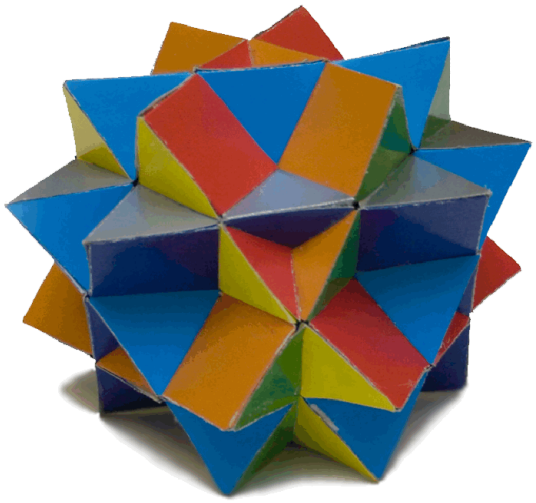

Рис. 45 – Третья звездчатая форма кубооктаэдра

Этот многогранник (рис. 45) интересен по двум причинам. Во-первых, на его модели ясно заметно расположение квадратных граней: они группируются в пары таким образом, что грани каждой из них параллельны между собой и перпендикулярны к остальным подобным граням. Во-вторых, многогранник представляет собой своего рода соединение шести четырехугольных пирамид, основаниями которых служат описанные выше квадраты, а боковые треугольные грани «вдавлены» в тело и касаются своими вершинами средних точек противоположных углублений.

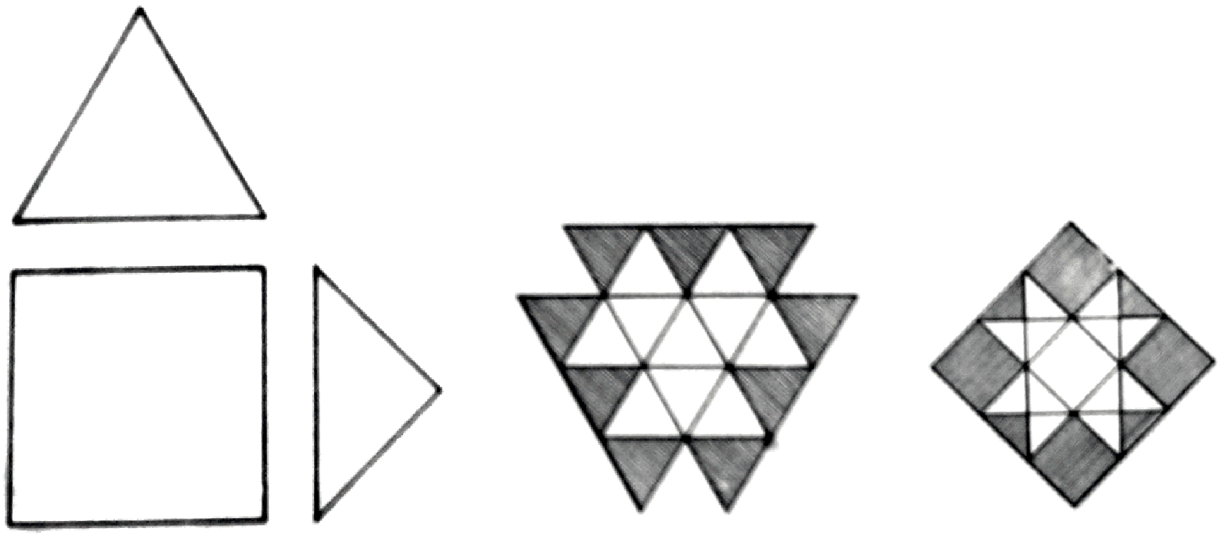

Рис. 46 – Шаблоны для изготовления модели

Модель я выполнил следующим образом. К четырем квадратным заготовкам подклеил по два равносторонних треугольника. Полученные части соединил треугольниками, оставляя квадраты вне кольца. Всего потребуется шесть таких частей, они будут соединены между собой также наклейками треугольников.

Треугольные впадины, гранями которых служат прямоугольные равнобедренные треугольники, закрывают отверстия, образованные тройками соединенных треугольников. На рис. 46 представлены необходимые заготовки.

6.2. Завершающая звездчатая форма кубооктаэдра

Рис. 47 – Завершающая звездчатая форма кубооктаэдра

Завершающая форма кубооктаэдра (рис. 47) особенно привлекательна тем, что она является соединением двух тетраэдров: звездчатого октаэдра и трех правильных четырехугольных призм, общим пересечением которых является исходный куб. Каждое основание этих призм представляет собой глубокую впадину, образованную четырьмя ребрами.

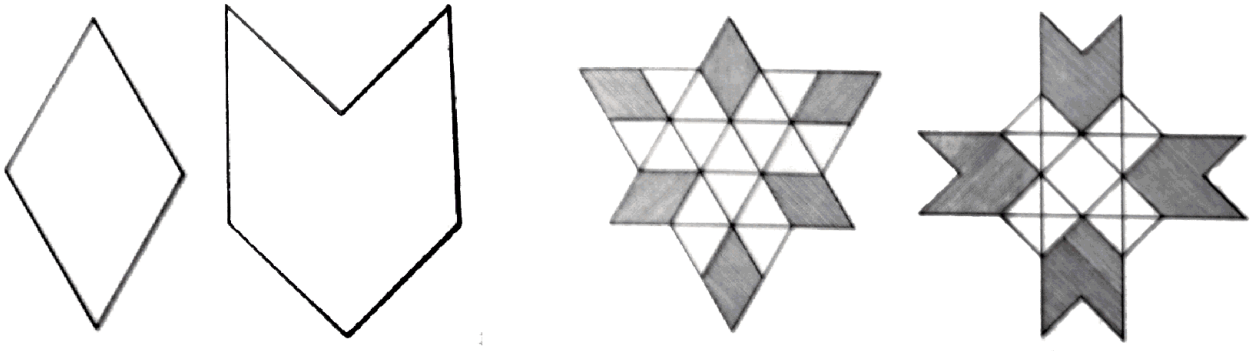

Рис. 48 – Шаблоны для изготовления модели

Для изготовления модели мне потребовались заготовки двух простых типов (рис. 48). Четыре заготовки, внешне напоминающие погоны, скрепляются в кольцо, которое имеет форму открытой с обоих концов призмы. К этой части подклеиваются четыре ромбические заготовки, соединяя их в глубокую впадину – верхнее основание призмы. Всего потребуется шесть таких частей, которые будут

соединяться друг с другом при помощи вершинных частей звездчатого октаэдра. Они также имеют ромбические грани.

Заключение

В заключение хочется привести слова Бертрана Рассела: «Математика владеет не только истиной, но и высшей красотой – красотой отточенной и строгой, возвышенной чистой и стремящейся к подлинному совершенству, которое свойственно лишь величайшим образцам искусства».

Работая над данной темой третий год, я изготовил модели не только однородных многогранников, но и их звездчатые формы. Это мне позволило выявить отношения, в которых находятся между собой различные тела.

Человек проявляет интерес к многогранникам на протяжении всей своей сознательной деятельности – от двухлетнего ребенка, играющего деревянными кубиками, до зрелого математика. Некоторые из правильных и полуправильных тел встречаются в природе в виде кристаллов, другие – в виде вирусов.

Считаю, что цель исследования достигнута, так как выявлены сходства и различия следующих звездчатых форм и соединений:

– соединения платоновых тел;

– звездчатые формы додекаэдра;

– звездчатые формы икосаэдра;

– звездчатые формы икососододекаэдра;

– звездчатые формы кубооктаэдра.

Классификация составлена по следующим признакам:

1) правильный/полуправильный многогранник взятый за основу;

2) количество добавленных к исходному телу частей, полученных при продолжении граней исходного тела.

Данную классификацию можно продолжить, проведя исследование других полуправильных многогранников. Например, продолжая грани архимедовых тел, теоретически можно получить сколь угодно много звездчатых форм.

Изготовив модели, я хотел показать красоту различных звездчатых форм, найти сходства и различия этих многогранников.

Считаю, что цель и задачи проекта достигнуты.

Список литературы

1. Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, И. И. Юдина. Геометрия: Доп. главы к шк. учеб. 8 кл.: учеб. пособ. для учащихся шк. и кл. с углубл. изуч. математики. – М.: Просвещение, 2004.

2. Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, И. И. Юдина. Геометрия: Доп. главы к шк. учеб. 9 кл.: учеб. пособ. для учащихся шк. и кл. с углубл. изуч. математики. – М.: Просвещение, 2004.

3. «Большая научная энциклопедия», М.: Научное издательство, 1996.

4. М. Венниджер «Модели многогранников», М.: Мир, 1974.

5. К. Левитин «Геометрическая рапсодия», М.: Знание, 1984.

6. О. Г. Хинн «Я познаю мир: Детская энциклопедия: Математика», М.: АСТ, 1996.

7. И. Ф. Шарыгин. Наглядная геометрия. 5-6 кл.: пособие для общеобразовательных учреждений. – М.: Дрофа, 2007.