**МУНИЦИПАЛЬНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ**

**«СРЕДНЯЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА № 30»**

**Г.СЫКТЫВКАРА**

**Исследовательская работа**

***Две замечательные теоремы планиметрии.***

**Автор: Курдюкова Екатерина,**

**ученица 10 «Т» класса**

**Руководитель: Курдюкова Т. М. ,**

**учитель математики**

**2010**

Оглавление

1. Введение. 3
2. Основная часть.
   1. Теорема Менелая 4
   2. Теорема Чевы. 5
   3. Задачи на применение доказанных теорем. 6
3. Заключение. 12
4. Список литературы. 13
5. Приложение. 14

Введение.

В школьном курсе геометрии рассматриваются важные и интересные свойства геометрических фигур на плоскости. Но невозможно включить все известные утверждения и соотношения, которые накопило человечество за многие годы, в школьный учебник геометрии.

**Актуальность.** В действительности многие удивительные соотношения и изящные геометрические факты не входят в основной курс геометрии. Многие из них сейчас выглядят малоинтересными, несовершенными и встречаются сейчас только в энциклопедиях. Однако некоторые из них продолжают жить, и по сей день. Одни из них теоремы Менелая и Чевы. Эти теоремы просты, интересны и находят применение при решении как простых, так и весьма сложных задач. Несмотря на это Теоремы Менелая и Чевы не изучаются в школе на уроках геометрии и встречаются только в школьном учебнике геометрии под редакцией Атанасяна Л.С. в приложении. Доказательства, предложенные автором сложны. Задачи, помещённые в учебнике на применение обратной теоремы Менелая трудны, а задач на применение прямой теоремы вовсе не рассматриваются.

**Цель:** исследовать применение теорем Менелая и Чевы при решении задач.

**Задачи:**

1. Показать применение теорем Менелая и Чевы при решении различных видов задач.
2. Сравнить задачи, решенные с использованием теорем Менелая и Чевы с задачами, решенными традиционным способом.

**Гипотеза:** Воспользовавшись различной литературой, интернет ресурсами, справочными материалами показать значимость теорем Менелая и Чевы для решения геометрических задач.

**Методы исследования:**

1. Анализ учебной литературы, научных статей.
2. Синтез полученной информации.

**Теорема Менелая.**

*Теорема названа в честь древнегреческого учёного Менелая ( I в. н.э.), которая была им доказана и опубликована в третей книге «Сферики». Долгое время её называли «теоремой о секущих».*

**Теорема Менелая.** Если прямая пересекает стороныили продолжения сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно в точках A1 , B1 и C1 , не совпадающие с вершинами треугольника, то имеет место равенство

**Доказательство.**

**C**

A1

C1

**B**

**A**

B1

D

Пусть прямая пересекает стороны BC и CA треугольника АВС в точках А1 и В1 ,а продолжение стороны АВ в точке С1.

1. Через вершину С треугольника АВС проведем прямую CD АВ; которая пересечет прямую А1В1 в точке D.
2. А1В1С1 А1CD по определению.
3. В1АС1 В1CD по определению.  
   *из пунктов 3 и 4 следует, что и .*
4. Перемножим эти равенства, получим доказываемое соотношение.

Доказательство остается в силе и в том случае, когда все три точки A1 ,  B1 и C1 лежат на продолжениях сторон АВС.

Для пояснения приведённого доказательства сделаем одно уточнение. Пусть – ненулевые коллинеарные векторы. Если , то будем писать: Значит, число k равно отношению длин векторов , взятому со знаком «плюс», если векторы *сонаправленны*, и со знаком «минус», если они направлены *противоположно*.

Легко проверить, что при таком соглашении полученное выше равенство принимает вид:

**Обратная теорема.** Если выполняется равенство, то точки A1 ,  B1 и C1 лежат на одной прямой. ( Приложение 1)

**ЗАМЕЧАНИЕ.** При решении задач, когда расположение точек A1 ,  B1 и C1 известно равенство используют в скалярном виде, т. е. рассматривают длины отрезков, а правую часть равенства берут равной 1.

Теорема Чевы.

*Джовани Чева (1648-1734) – итальянский инженер-гидравлик и экономист. Носящая его имя теорема содержится в опубликованной им в 1678г. работе « О прямых линиях».*

**Теорема Чевы.** Пусть на сторонах ВС, СА, АВ треугольника АВС или их продолжениях взяты соответственно точки А1, В1, С1,не совпадающие с вершинами треугольника. Тогда если прямые АА1, ВВ1, СС1 пересекаются или попарно параллельны, то

**Доказательство.**

I) Пусть прямые АА1, ВВ1, СС1 пересекаются в точке О, лежащей внутри или вне треугольника АВС. В том и другом случае, применив теорему Менелая к треугольнику ВСС1 и секущей АА1, Получим:

А

С

В

А1

С1

В1

О

О

В

А

С

А1

В1

С1

а)

б)

Аналогично из треугольника АСС1, пересеченного прямой ВВ1, находим:

Перемножим последние два равенства почленно и получим:

II) Рассмотрим случай, когда прямые АА1, ВВ1, СС1 параллельны. Пусть точка В1 лежит на продолжении стороны АС, точка А1 лежит на стороне ВС, точка С1 лежит на стороне АВ. Тогда достаточно доказать, что

С1

В1

А1

С

В

А

Используя теоремой об отрезках отсекаемых на сторонах угла параллельными прямыми, имеем:

Подставим эти равенства в левую часть формулы (\*) имеем:

Что и требовалось доказать.

**Обратная теорема.** Если выполняется равенство , то прямые AA1 , BB1 и CC1 либо пересекаются в одной точке, либо попарно параллельны.( Приложение 1)

**Замечание.** Записывая отношение отрезков, следует двигаться по контуру треугольника от вершины до точки пересечения с прямой и от точки пересечения до следующей вершины.

**Задачи.**

**Задача 1**. На сторонах АВ и АС АВС взяты точки M и N так, что . Отрезки BN и CM пересекаются в точке K. Найдите отношение отрезков

**Решение.** Применим теорему Менелая к и секущей CM. Получим,

**A**

**B**

**C**

M

N

K

K

Решение задачи используя подобие треугольников.

(Приложение 2)

**Задача 2.** На стороне ВС АВС выбрана точка F. Оказалось, что отрезок AF пересекает медиану BD в точке Е так, что АЕ = BE. Доказать, что BF = FE.

**А**

**В**

**С**

D

E

F

**Решение.**

Запишем теорему Менелая для и прямой BD

т. к. CD = DA и AE = BC имеем ,

значит FB = EF.Ч.т.д.

**А**

**С**

**В**

N

M

**K**

**Задача 3.** Площадь равна S. Отрезок AM поделил сторону ВС в отношении ВМ : МС = 4 : 3, а отрезок BN поделил сторону AC в отношении AN : NC = 5 : 3. Найдите площадь четырехугольника NKMC (K-точка пересечения AM и BN)

**Решение:**

SMKNC = SBNC - SBKM

1. SBNC = S;

N делит сторону АС отношении 3 : 8.

У и высоты совпадают.

; SBNC= S

1. т. к. имеют общий угол

, из условия задачи.

1. Для того, чтобы найти отношение воспользуемся теоремой Менелая для треугольника NBC и секущей MK

**Задача 4.** На сторонах ВС, СА и АВ треугольника АВС взяты точки A1 ,  B1 и C1 такие, что Найти площадь треугольника, ограниченного прямыми АА1, ВВ1 и СС1 , если площадь треугольника АВС равна S.

**Решение.**

С1

**А**

**В**

**С**

В1

А1

N

M

K

I.

1. имеют равные

высоты (из условия задачи). .

1. имеют общий угол .
2. Применим теорему Менелая к .

- из условия

II.

1. S

S

1. S

S

1. S

Ответ:

**Задача 5(прямая Симпсона).** Основания перпендикуляров, проведенных к прямым, содержащим стороны треугольника, из произвольной точки, описанной около него окружности, лежат на одной прямой. ( Приложение 3)

**Задача 6 (Теорема Дезарга).** Прямые АА1 , ВВ1 , СС1 пересекаются в одной точке О. Докажите, что точки пересечения прямых AB и A1B1 , BC и B1C1 , AC и A1C1 лежат на одной прямой. ( приложение 3)

А1

М

В1

Р

В

С

А

**Задача 7.** На медиане СМ треугольника АВС дана точка Р. Прямые АР и ВР Пересекают стороны ВС и АС соответственно в точках А1 и В1.Доказать, что отрезок А1В1 параллелен АВ.

**Доказательство.**

Прямые АА1, ВВ1, МС пересекаются в одной точке.

В силу теоремы Чевы

.. В силу теоремы об пропорциональных отрезках отсекаемых параллельными прямыми на сторонах угла отрезок А1В1 параллелен АВ. Ч.т.д.

**Задача 8.** В треугольник АВС вписана полуокружность так, что её диаметр лежит на стороне ВС, а дуга касается сторон АВ и АС соответственно в точках С1 и В1. Доказать что прямые пересекаются на высоте АА1 треугольника.

**Доказательство.**

Из условия задачи следует, что точки А1, С1, В1 лежат на сторонах треугольника АВС. Следовательно , достаточно доказать, что

С1

В1

А1

С

В

О

А

Центр О полуокружности соединим с точками касания С1 и В1.

Обозначим через r радиус окружности, из прямоугольных треугольников ОВС и ОСВ находим: ;.

Из прямоугольных треугольников АВА1 и АСА1, следует ;.

АВ1=АС1, как отрезки касательных.

Следовательно, согласно теореме Чевы,

прямые ВВ1 и СС1 пересекаются в одной точке.

А

А1

С

В

С1

В1

**Задача 9.** Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

**Доказательство.** Так как точки А1, С1, В1 лежат на сторонах треугольника, достаточно доказать, что выполняется равенство   
  
 Так как ВВ1, СС1, АА1 медианы имеем, что  
  
Тогда в силу теоремы Чевы прямые ВВ1, СС1, АА1 пересекаются в одной точке. Ч.т.д.

Школьное доказательство. ( приложении 2)

**Задача 10.** Докажите что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

**Доказательство.**

Пусть BN,AM,CK высоты треугольника АВС проведённые соответственно к сторонам АС,СВ ,АВ. Так как точки M,N,K лежат на сторонах треугольника АВС, то достаточно доказать, что

Тогда в силу теоремы Чевы прямые BN, AM, CK пересекаются в одной точке.Ч.т.д.

Школьное доказательство. ( Приложение 2)

**Заключение.**

В данной работе представленыдоказательства теорем Менелая и Чевы. Теоремы Чевы и Менелая можно назвать «двойственными» они, похоже, формулируются и доказываются. В своей работе я предлагаю доказательства теоремы Менелая (прямая и обратная), используя подобия треугольников, а теорему Чевы доказываю с помощью теоремы Менелая.

*Замечательным свойством теоремы Чевы является то, что она может служить отправной точкой при повторении основных свойств треугольника* в 9 классе. В частности, с её помощью легко доказываются следующие утверждения:

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке.
2. Высоты треугольника пересекаются в одной точке.
3. Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке

И многие другие известные соотношения.

Доказательства двух первых утверждений приводятся в работе.

Одним из замечательных свойств геометрических задач является многообразие методов их решения. Поэтому остановимся на том, когда же имеет смысл применять теорему Менелая при решении задач? Возможность *применить теоремы Менелая имеет смысл, когда в условии задачи:*

1. *Идёт речь, об отношении отрезков* (иногда завуалированном: доказать равенство отрезков, доказать, что точка является серединой отрезка).
2. *Если на чертеже имеются элементы, присутствующие в теореме Менелая* (треугольник и прямая, пересекающая его стороны или их продолжения).

Иногда полезно применять обратную теорему (*если необходимо доказать, что какие-нибудь точки лежат на одной прямой*). А также при доказательстве теорем. В своей работе с помощью теоремы Менелая я доказываю теорему Чевы, Симпсона, Дезарга.

*Применение теорем Менелая и Чевы при решении задач и доказательстве теорем позволяют добиться более простых и лаконичных решений, доказательств. Знание учащимися этих теорем даёт дополнительные возможности при изучении геометрии.*

Данная работа содержит геометрический материал достаточный для того что бы использовать его на факультативах и как дополнительный материал для учащихся интересующихся математикой. Данную работу можно продолжить, изучив применение этих теорем в пространстве.

**Список литературы.**

1. Геметрия: Учебник для 7-9клАтанасян Л,С, - М.: Просвещение.1998 – 335 с.
2. Кокейтер Г.С.М. и Грейтцер С.Л.Новые встречи с геометрией – М.: Наука.1978 – 224с.
3. Прасолов В.В Задачи по планиметрии – МЦНМО,2002.
4. Интернет ресурсы.

<http://www.mccme.ru>

<http://www.kvant.mccme.ru>

**Приложение 1.**

**Обратная теорема Менелая**

Прежде чем рассмотреть обратную теорему сделаем одно уточнение. Пусть – ненулевые коллинеарные векторы. Если , то будем писать: Значит, число k равно отношению длин векторов , взятому со знаком «плюс», если векторы *сонаправленны*, и со знаком «минус», если они направлены *противоположно*.

Легко проверить, что при таком соглашении полученное выше равенство принимает вид:

**Обратная теорема.** Если выполняется равенство, то точки A1 ,  B1 и C1 лежат на одной прямой.

**Доказательство.**

Допустим, что выполнено равенство , и пусть прямая А1В1 пересекает прямую АВ в точке С2. Согласно прямой теореме,

Сравнивая это соотношение с данным, заключаем, что

Прибавив к обеим частям равенства 1, получим: откуда , т. е. точки C1 и C2 совпадают.

Объединяя прямую и обратную теоремы, получаем следующий результат.

Если на сторонах ВС, СА, АВ треугольника АВС или на их продолжениях взяты точки A1 ,  B1 и C1, то эти точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

**Обратная теорема Чевы.**

**Обратная теорема.** Если выполняется равенство , то прямые AA1 , BB1 и CC1 либо пересекаются в одной точке, либо попарно параллельны.

**Доказательство.**

Предположим теперь, что выполняется равенство (\*), и докажем, что тогда прямые АА1, ВВ1, СС1 пересекаются в одной точке. Пусть С2 – Точка пересечения прямой АВ с прямой проходящей через точку С и точку пересечения прямых АА1, ВВ1. Для точки С2 выполняется отношение , как и для точки С1.

Поэтому, = . Следовательно, C2 совпадает C1 , т. е. прямые AA1 , BB1 и CC1 пересекаются в одной точке.

**Замечание.** Записывая отношение отрезков, следует двигаться по контуру треугольника от вершины до точки пересечения с прямой и от точки пересечения до следующей вершины.

**Приложение 2.**

**Задача 1**. На сторонах АВ и АС АВС взяты точки M и N так, что . Отрезки BN и CM пересекаются в точке K. Найдите отношение отрезков

D

N

**A**

**B**

**C**

M

K

Рассмотрим решение этой задачи, используя подобие треугольников.

**Решение.**

1. Проведём прямую BD параллельную стороне АС. Точка D точка пересечения этой прямой с прямой СМ.
2. Рассмотрим треугольники DKB и CKN. Данные треугольники подобны.
3. ;
4. , из условия.

Ответ:

**Задача 9.** Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

А

А1

С

В

С1

В1

О

**Доказательство.**

Рассмотрим треугольник АВС. Обозначим буквой О точку пересечения медиан АА1 и ВВ1.

Проведём среднюю линию А1В1 этого треугольника.

Отрезок А1В1параллелен стороне АВ, поэтому

Следовательно, и значит их стороны пропорциональны:

АВ = 2 А1В1,  поэтому АО = 2А1О и ВО = 2В1О.

Таким образом, точка О пересечения медиан АА1

и ВВ1делит каждую из них в отношении 2:1,

считая от вершины.

Аналогично доказывается, что точка пересечения

медиан ВВ1 и СС1 делит каждую из них

в отношении 2:1, считая от вершины, и, следовательно, совпадает с точкой О. Итак, все три медианы треугольника АВС пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая с вершины.

**Задача 10.**Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

**Решение.**

Рассмотрим произвольный треугольник АВС и докажем. Что прямые АА1, ВВ1,СС1, содержащие его высоты пересекаются в одной точке.

Проведём через каждую вершину треугольника АВС прямую ,параллельную каждой стороне. Получим треугольник А2В2С2.

1. Точки А, В, С середины сторон треугольника АВС. АВ = А2С,

АВ = СВ2как противоположные стороны параллелограмма АВА2С и АВСВ2, поэтому А2С = СВ2.

1. Аналогично С2А = АВ2, С2В = ВА2.
2. .

*Таким образом прямые* *АА1, ВВ1,СС1 являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника* *А2В2С2.Значит, они пересекаются в одной точке.*

О

А

В

С

А1

В1

С1

А2

С2

В2

Что и требовалось доказать.

**Приложение 3.**

**Задача 5(прямая Симпсона).** Основания перпендикуляров, проведенных к прямым, содержащим стороны треугольника, из произвольной точки, описанной около него окружности, лежат на одной прямой.

**Решение.** Пусть PA1, PB1, PC1 перпендикуляры, проведённые к прямым, содержащим стороны треугольника АВС.Запишем теорему Менелая для

А теперь докажем, что это равенство верно.

А

В

Р

С

С1

В1

А1

Следовательно, в силу теоремы Менелая точки А1, В1. С1 лежат на одной прямой.

**Задача 6 (Теорема Дезарга).** Прямые АА1 , ВВ1 , СС1 пересекаются в одной точке О. Докажите, что точки пересечения прямых AB и A1B1 , BC и B1C1 , AC и A1C1 лежат на одной прямой.

**Решение.**

Пусть A2 , B2 , C2 – точки пересечения прямых BC и B1C1 , AC и A1C1 , AB и A1B1 . Применим теорему Менелая к следующим треугольникам и секущем:

A1

A

C1

B2

B1

B

A2

C2

**С**

С

O

1. Перемножив равенства получим.  
     
   *Следовательно в силу теоремы Менелая точки А2, В2, С2Лежат на одной прямой.*