

1. РОЖДЕНИЕ ФУНКЦИИ.

Все течет, все изменяется в окружающем нас мире, как заметили еще древние. Вращается вокруг своей оси земной шар, и день сменяет ночь, Земля вершит свой вечный бег вокруг Солнца, Солнце вместе со всеми планетами вечно летит в космические дали... Кажется, причем здесь математика, а тем более функции и графики, но, как образно заметил великий Г. Галилей (1564-1642), книга природы написана на математическом языке и ее буквы - математические знаки и геометрические фигуры, без них невозможно понять ее слова, без них тщетно блуждание в бесконечном лабиринте. А именно функция является тем средством математического языка, которое позволяет описывать процессы движения. изменения, присущие природе.

Впервые функция вошла в математику под именем "переменная величина" в знаменитом труде французского математика и философа Р. Декарта "Геометрия" (1637 год), и ее появление послужило, по словам Энгельса, поворотным пунктом в математике, благодаря чему в нее вошли движение и тем самым диалектика. Без переменных величин, Ньютон не смог бы выразить законы динамики, описывающие процессы механического движения тел - небесных и вполне земных, а современные ученые не могли бы рассчитывать траектории движения космических кораблей и решать бесконечное множество технических проблем нашей эпохи.

С развитием науки понятие функции уточнялось и обобщалось. Сейчас оно стало настолько общим, что совпадает с понятием соответствия. Например, каждый человек имеет имя. Другими словами, каждому человеку соответствует определенное имя.

Поэтому можно говорить, что мы имеем функцию: областью "значений" независимой переменной здесь служит множество всех людей, а множеством "значений" функции - множество всевозможных имен.

Любопытно, что приведенная здесь функция является, вообще говоря, неоднозначной, так как некоторые люди имеют по нескольку имен. Рассмотрение неоднозначных функций неудобно, поэтому стараются перейти к их однозначным ветвям, то есть для каждого значения независимой переменной из всех значений функции выбирают какое-либо одно.

Например, из всех имен человека, если их несколько, одно объявляется первым именем. Если ограничиться только первыми именами, то рассматриваемая функция является однозначной. Обычно, если о функции ничего дополнительно не сказано, она предполагается однозначной, а возможность многозначности специально оговаривается. Таким образом, функцией в общем понимании называется любой закон (правило), по которому каждому объекту из некоторого класса, области определения функции, поставлен в соответствие некоторый объект из другого (или того же) класса - области возможных значений функции.

Мы будем называть функцией зависимость, связывающую с каждым значением одной переменной величины (аргумента) из некоторой области ее изменения определенное значение другой величины (функции).

2. КАК ЗАДАЮТСЯ ФУНКЦИИ?

Существует три основных способа выражения зависимостей между двумя величинами: табличный, аналитический ("формульный") и графический. С этими классическими способами представления функции часто приходится иметь дело при установлении и изучении зависимостей, как в естествознании, так и в самой математике.

Табличный способ важен потому, что является основным при обнаружении реальных зависимостей и может оказаться к тому же единственным средством их задания. К табличному заданию функции часто переходят при выполнении практических расчетов, с ней связанных: например, применение таблиц квадратных корней удобно при проведении расчетов, в которых участвуют такие корни. Появление современных ЭВМ с их безграничными возможностями хранения и переработки информации неизмеримо

расширило перспективы табличных представлений зависимостей, причем составление и преобразование многочисленных таблиц часто образует промежуточные этапы сложного вычисления.

Графический способ представления зависимостей также является одним из средств их фиксации при изучении реальных явлений. Это позволяет делать различные "самопишущие" приборы, такие, как сейсмограф, электрокардиограф и тому подобное, изображающие информацию об изменении измеряемых величин в виде графиков. Но если есть график, то определена и соответствующая ему функция. В таких случаях говорят о графическом задании функции.

графическое представление функции очень удобно для непосредственного восприятия ее особенностей, характерных свойств. Такая возможность особенно благоприятна для изучения многих вопросов, связанных с функциями. Как говорится, лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать. Поэтому при исследовании функции всегда желательно представить, хотя бы ориентировочно, ее график.

Аналитическое (формульное) задание функции отличается своей компактностью, легко запоминается и содержит в себе полную информацию о зависимости. Этот способ удобен для проведения теоретических выкладок, применения классических методов анализа функций и записи результатов.

3. ВИДЫ ФУНКЦИЙ

а) Линейная – $y = kx + b$

б) Квадратичная - $y = ax^2 + bx + c$

в) Степенные:

1) $y = x^n$

2) $y = x^{-n}$

3) $y = x^a$

Г) Показательная – $y = a^x$

Д) Логарифмическая – $y = \log_a x$

Е) Тригонометрические:

1) $y = \sin x$

2) $y = \cos x$

3) $y = \operatorname{tg} x$

4) $y = \operatorname{ctg} x$

ж) Обратные тригонометрические:

1) $y = \arcsin x$

2) $y = \arccos x$

3) $y = \operatorname{arctg} x$

4) $y = \operatorname{arcctg} x$

з) Кусочно-линейные

И) Разрывные

4. КАК ОБРАЗУЮТСЯ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ

Имея определенный набор базисных функций f_1, f_2, \dots, f_k и допустимых операций F_1, F_2, \dots, F_s (их разрешается применять любое число раз) над ними, мы можем получать другие функции, подобно тому, как из деталей конструктора с помощью определенных правил их соединения можно получать разные модели. Класс всех получаемых таким образом функций будем обозначать так:

$\langle f_1, f_2, \dots, f_k; F_1, F_2, \dots, F_s \rangle$. В частности, если принять за базисные все основные элементарные функции и допустить лишь арифметические операции и взятие суперпозиции, то получим класс элементарных функций. Беря в качестве базисных, часть основных элементарных операций и допуская, возможно, лишь часть указанных операций, получим некоторые подклассы класса элементарных функций, некоторые семейства функций, порождаемые данным базисом и данными операциями. Вот несколько

примеров таких семейств функций, где под (a) понимается операция умножения на любую константу:

$\langle x; (.) \rangle$ -- семейство целых положительных степеней $y = x^n$,
n принадлежит N;

$\langle x, 1; (a), (+) \rangle$ -- семейство линейных функций $y = ax + b$;

$\langle x, 1; (a), (+), (.) \rangle$ -- семейство многочленов $y = a_0 * x^n + \dots + a_{(n-1)} * x + a_n$, где n принадлежит N.

Если взять в качестве базисных лишь степенные функции с рациональным показателями, а допустимыми считать все арифметические операции и суперпозицию, то получаем класс так называемых явных алгебраических функций. Это функции, получаемые из тождественной $y = x$ с помощью алгебраических операций, к которым, помимо арифметических действий, относятся возведение в рациональную степень и извлечение корня.

Неявные алгебраические функции $y(x)$ определяются уравнениями вида

$$a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \dots + a_n(x)y = b(x),$$

где $a_0(x), \dots, a_n(x), b(x)$ -- многочлены относительно x , причем $a_0(x)$ тождественно не равно 0

Функции, не являющиеся алгебраическими, называются трансцендентными. Таковы, например, функции $y = 2^x$, $y = \log_2 x$,
 $y = x^2 + 2^x$, $y = x^x$ и так далее.

5. О ПОСТРОЕНИИ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ И О ТОМ, ЧТО МОЖНО УВИДЕТЬ, ГЛЯДЯ НА ГРАФИК

Глядя на график, непосвященный увидит лишь некоторую кривую, более сведущий свяжет ее с функцией и опишет некоторые характерные черты последней (например, возрастание или убывание), наконец, искушенный в математике даст, насколько это возможно, полную характеристику функции по данному графику, перечислит все ее основные особенности, а быть может, и укажет формулу, задающую функцию с таким или сходным по форме графиком.

Так, например, математик, взглянув на рисунок (приложение №1) сказал бы примерно следующее: "Перед нами график некоторой функции. Она всюду определена и непрерывна. Всяду положительна, поскольку график расположен выше оси абсцисс. Четная, так как график симметричен относительно оси ординат. Возрастает на промежутке от минус бесконечности до нуля и убывает от нуля до плюс бесконечности. Имеет единственный экстремум - максимум при $x=0$. Ось абсцисс является асимптотой, поскольку график неограниченно к ней приближается, если x стремится к плюс бесконечности и если x стремится к минус бесконечности, значит, функция стремится к нулю при стремлении аргумента к плюс или минус бесконечности. Примером такой функции может служить функция вида $y = 1/(1+x^2)$

Чтобы правильно отражать на графике и считывать по нему характерные свойства, особенности функции, следует хорошо понимать как сами эти свойства, так и способы их графического выражения. Приведем краткий перечень терминов и их графическое толкование:

Непрерывность - "сплошность", неразрывность кривой, изображающей график, возможность ее начертания без отрыва карандаша от бумаги.

Гладкость-- плавность кривой; график поворачивает постепенно, не имеет изломов и заострений.

Возрастание-- подъем точки, движущейся по графику слева направо.

Убывание-- спуск точки, движущейся по графику слева направо.

Постоянство функции - параллельность графика оси абсцисс.

Знакопостоянство функции - расположение графика выше (ниже) оси абсцисс.

Выпуклость вверх (вниз) - любая дуга графика лежит выше (ниже) стягивающей ее хорды; касательная при движении точки касания по графику слева направо поворачивается по часовой стрелке (против нее).

Четность функции - симметричность графика относительно оси ординат. (Аналитически выражается тождеством $f(x) = f(-x)$.)

Нечетность функции - симметричность графика относительно начала координат. (Аналитически выражается тождеством $f(x) = -f(-x)$.)

Периодичность функции - график можно разбить на одинаковые по форме участки, получаемые один из другого сдвигом вдоль оси абсцисс. (Аналитически выражается наличием такого числа $T > 0$, что $f(x+T) = f(x) = f(x-T)$ для всех x .)

Ограниченность сверху (снизу)-- расположение графика всюду ниже (выше) некоторой прямой, параллельной оси абсцисс. (Аналитически выражается наличием такого числа M , что $f(x) < M$ ($f(x) > M$) для всех x .)

Асимптота-- прямая, к которой неограниченно приближается точка, движущаяся по графику, неограниченно удаляясь от начала координат.

Вертикальная асимптота-- прямая $x = c$, где c - точка "бесконечного разрыва" графика, при стремлении аргумента к которой слева или справа значения функции неограниченно возрастают по абсолютной величине (при этом график уходит неограниченно вверх или вниз).

Горизонтальная асимптота-- прямая $y = a$, к которой неограниченно приближается график при x стремящемся к плюс бесконечности (правая асимптота) или x стремится к минус бесконечности (левая асимптота). Запись x стремится к плюс бесконечности выражает процесс неограниченного увеличения x , безграничное удаление точки x вправо по оси абсцисс; запись же x стремится к минус бесконечности означает неограниченное удаление точки x влево по оси абсцисс.

Наклонная асимптота-- прямая $y = kx + b$, к которой график неограниченно приближается при x стремящемся к плюс бесконечности (правая асимптота) или при x стремящемся к минус бесконечности (левая асимптота). Аналитически, наличие

асимптоты $y = kx+b$ обуславливается возможностью представления функции в виде $y = kx+b+0(x)$, где $0(x)$ стремится к нулю при x стремится к плюс бесконечности или x стремится к минус бесконечности.

Характерные точки графиков:

Нули (корни) функции --точки, в которых график достигает оси Ox . Аналитически-- решение уравнения $f(x)=0$.

Точка максимума - абсцисса "вершины графика", точка, в которой функция определена и в которой возрастание функции сменяется на ее убывание.

Точка минимума - абсцисса "дна впадины" на графике, точка, в которой функция определена и ее убывание сменяется на возрастание.

Точка экстремума - точка максимума или минимума функции.

Точка перегиба - точка графика, при переходе через которую меняется направление его выпуклости.

Точка излома - точка графика, в которой резко, скачком меняется направление движения по графику.

Точка разрыва - точка на оси абсцисс, при прохождении над или под которой график терпит разрыв и для его продолжения необходимо оторвать карандаш от бумаги. Как было сказано ранее, мы к точкам разрыва причисляем также те концы области определения функции, в которых она не определена.

При построении графика функции следует проводить ее анализ, исследование, направленное на выявление характерных особенностей функции, и одновременно отражать схематически на рисунке обнаруженные черты ее поведения. По изображенным элементам строится затем общая картина -- график функции. Исследование функции $y = f(x)$ удобно выполнять по следующей схеме:

1. Найти область определения функции (символически $D(f)$).
 2. Найти нули функции, то есть решения уравнения $f(x)=0$.
 3. Найти точки разрыва, если они имеются (часто это значение нуля знаменателя в формуле, задающей функцию).
 4. Определить знаки функции на промежутках, на которые область определения разбивается ее нулями и точками разрыва. Для этого нужно изобразить систему координат пометить в ней знаки функции, ставя "+" над теми промежутками, где она положительна, и "-" под теми промежутками, где она отрицательна. Этим определится то, в какой полуплоскости, верхней или нижней, должен располагаться график при значениях аргумента, принадлежащих данному промежутку.
- З а м е ч а н и е.** Для определения знаков функции на указанных промежутках достаточно выяснить ее знак в одной(любой) из точек исследуемого промежутка-- во всех точках этого промежутка знак такой же.
5. Выяснить наличие вертикальных асимптот, то есть значений $x = x(0)$, при приближении x к которым график уходит неограниченно вверх или вниз. Обычно такие значения являются нулями знаменателя дробного выражения в формуле, задающей функцию(как, например, $x(0)=0$ у функции $y = 1/x$), или "границными" точками области определения (как, например, $x(0)=0$ у функции $y = \log_2 x$). Изобразить асимптоты в системе координат и отметить схематически характер приближения к ним графика слева и справа.

6. Выяснить поведение функции если x стремится к плюс бесконечности и если x стремится к минус бесконечности, то есть при больших по модулю положительных и отрицательных значениях x . Установить наличие горизонтальных или наклонных асимптот; если они есть, провести их в координатной плоскости и изобразить схематически характер приближения к ним графика функции.
7. Выяснить, будет ли функция четной, нечетной, периодической. (Заметим, что эти вопросы полезно выяснить в начале исследования, вслед за пунктом 1, так как наличие одного из названных свойств упрощает дальнейшее исследование. К сожалению, большинство функций подобными свойствами не обладают.)
8. Учитывая проведенный анализ и уже полученные на рисунке элементы графика, доделать черновой набросок, эскиз графика. Вычислить несколько контрольных точек графика, исходя из заданной формулы, и уточнить изображение.

Необходимость учета области определения и знаков функции можно выразить следующими первыми "заповедями" тому, кто строит график: "Не пытайся изображать график на тех промежутках, где его быть не может" и " Не строй график в той полуплоскости, где его быть не может".

6. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ.

Прежде всего, следует отметить, что под построением графика функции в математике понимается отнюдь не точное построение графика функции по токам (наоборот от такого способа хотелось бы предостеречь). Вполне достаточно изобразить эскиз графика функции, который бы полно и правильно отражал все свойства функции, выявленные в результате проведенного исследования. Удобно строить график параллельно исследованию функции: обнаруженное свойство сразу отмечать на графике. Во многих случаях при построении графиков оказывается возможным уменьшить число пунктов плана исследования функции, или вообще отказаться от него, если знать основные методы построения графиков функций и свойства и графики элементарных функций.

А) ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ.

1. Построение графика функции $y=Af(ax+b)+B$, предполагается знание построения графика элементарной функции $y=f(x)$.
2. построение графика функций $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, $|y| = f(x)$, предполагается знание построения элементарной функции $y=f(x)$.
3. графическое сложение, вычитание, умножение, деление функций $y=f(x)$, $y=g(x)$, предполагается знание построения элементарной функции $y=f(x)$, $y=g(x)$.
4. построение графиков сложных функций $y=f(g(x))$, предполагается знание построения элементарной функции $y=f(x)$, $y=g(x)$.
5. построение графиков обратных функций.

1. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y=Af(ax+b)+B$

№	функция	Преобразование графика функции
1	$y=f(x)+B$	Параллельный перенос графика функции $y=f(x)$ вдоль оси Oy на B единиц вверх, если $B>0$, и на $ B $ единиц вниз, если $B<0$ (приложение № 2, рисунок 1)
2	$y=f(x+b)$	Параллельный перенос графика функции $y=f(x)$ вдоль оси Ox на b единиц влево, если $b>0$, и на $ b $ единиц вправо, если $b<0$ (приложение № 2, рис. 2)
3	$y=Af(x)$, ($A>0$)	Растяжение графика функции $f(x)$ вдоль оси Oy в A раз, если $A>0$,

		растяжение в $1/A$ раз, если $0 < A < 1$ (приложение № 3, рис. 1)
4	$y=f(ax), (a>0)$	Сжатие графика $y=f(x)$ вдоль оси Ox (относительно оси Oy) в a раз, если $a>0$, растяжение в $1/a$ раз, если $0<a<1$ (приложение № 3. рис. 2)
5	$y=-f(x)$	Симметричное отражение графика $y=f(x)$ относительно оси Ox (приложение № 3, рис. 3)
6	$y=f(-x)$	Симметричное отражение графика $y=f(x)$ относительно оси Oy (приложение № 3, рис. 4)
7	$y= f(x) $	Часть графика $y=f(x)$, расположенная ниже оси Ox симметрично отражается относительно этой оси. Остальная часть графика остается без изменений. (приложение № 4, рис.1)
8	$y=f(x)$	Часть графика $y=f(x)$, расположенная в области $x>0$ и $x=0$ остается без изменения, а его часть для области $x<0$ заменяется симметричным изображением относительно оси Oy части графика $y=f(x)$ для $x>0, x=0$ (оставшейся без изменения части графика) (приложение № 4, рис.2)
9	$ y =f(x)$	Часть графика $y=f(x)$, расположенная выше оси Ox остается без изменения, а его нижняя часть ($y<0$) заменяется ему симметричным отображением относительно оси Ox верхней части графика $y=f(x)$. (оставшейся без изменения части графика). (приложение № 4, рис.3)

б) Построение графиков функций вида $y = f(|x|)$.

На основании определения модуля имеем:

$y = f(|x|)$ разбивается на две функции

1) $f(x)$, если $x > 0$ или $x=0$

2) $y = f(-x)$, если $x < 0$

Следовательно, график функции $y = f(x)$ состоит из двух графиков:

1) графика $y = f(x)$ в правой полуплоскости

2) графика $y = f(-x)$ в левой полуплоскости.

Например, пусть требуется построить график функции

$$y = x^2 - 3|x| + 2.$$

На основании определения модуля имеем:

1) $y = x^2 - 3x + 2$, если $x > 0$ или $x=0$

2) $y = x^2 + 3x + 2$, если $x < 0$

(график функции изображен в приложении №5)

Функция $y = f(x)$ четная, поэтому для построения ее графика достаточно построить график функции $y = x^2 - 3x + 2$, для всех $x > 0$ или $x = 0$ из области ее определения и отразить полученную часть графика симметрично оси ординат.

В приложении №6 представлен график функции $y = x^2 - |x| - 2$, в приложении №7 - график функции $y = x^2 + |x| - 2$.

Построение графиков функций вида $y = |f(x)|$.

На основании определения модуля имеем:

$$y = |f(x)|$$

1) $y = f(x)$, если $f(x) > 0$ или $f(x) = 0$

2) $y = -f(x)$, если $f(x) < 0$

Для построения графика функции $y = f(x)$ достаточно построить график функции $y = f(x)$ для всех x из области ее определения и ту часть графика функции $y = f(x)$, которая расположена ниже оси абсцисс, отразить симметрично этой оси. Таким образом, график функции $y = f(x)$ расположен в верхней полуплоскости.

Так, для построения графика функции $y = |x^2 - 4|$ для всех x и ту часть графика, которая расположена в нижней полуплоскости при $-2 < x < 2$, отобразить симметрично оси абсцисс. (приложение № 8)

Построение графика $y = -x^2 - 4x - 3$

график функции $y = -x^2 - 4x - 3$ образован от графика $y = x^2$.

1) Строим график функции $y = x^2$

2) Меняем направление ветвей

3) Совершаем параллельный перенос вдоль оси Oy на 1 единицу вверх, получаем график новой функции $y = -x^2 + 1$

4) Совершаем параллельный перенос вдоль оси Ox на 2 единицы влево, получаем график новой функции $y = -(x+2)^2 + 1$, а это и есть функция $y = -x^2 - 4x - 3$

(приложение № 9)

Построение графика функции $y = 1/2x^2$

График функции $y = 1/2x^2$ образован от графика $y = x^2$.

1) Строим график функции $y = x^2$

2) Умножаем коэффициент, a на $1/2$ и получаем функцию $y = 1/2x^2$, ветви графика этой функции прижимаются к оси Ox (приложение № 10)

Построение графика функции $y = 2x^2$

График функции $y = 2x^2$ образован от графика $y = x^2$

1) Строим график функции $y = x^2$

2) Умножаем коэффициент, a на 2 и получаем функцию $y = 2x^2$, ветви графика этой функции прижимаются к оси Oy (приложение № 11)

ГРАФИЧЕСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Те или иные графические интерпретации, на наш взгляд, одно из самых эффективных и эффективных средств решения различных задач с параметрами. Стоит выделить две разновидности рассматриваемого приема:

1) изображение на плоскости $(x; a)$, где x - неизвестное, a - параметр.

2) На плоскости $(x; y)$ рассматривается семейство кривых, зависящих от параметра a .

Первый способ обычно применяется в задачах, в которых фигурируют лишь неизвестная x и параметр a , или сводящихся к таким.

Второй часто оказывается удобен в задачах с двумя неизвестными x и y и одним параметром a .

Перейдем к примеру.

Найти все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{7|y|} \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение. Перейдем к новым известным $u=x-1$, $v=7y$.

Получим систему

$$\begin{cases} \sqrt{|u|} + \sqrt{|v|} = 1 \\ u^2 + v^2 = -4a \end{cases}$$

Понятно, что новая система должна иметь четыре решения. Рассмотрим плоскость $(u; v)$.

Второму уравнению соответствует на этой плоскости окружность с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{-4a}$. Первому уравнению - некоторая кривая, симметричная относительно осей координат (u и v входят в виде $|u|$ и $|v|$) и биссектрис между осями координат (u и v входят симметрично). (График этой функции схематично изображен в приложении № 12)

Поскольку окружность $u^2 + v^2 = r^2$ также симметрична относительно этих четырех прямых, то можно сделать вывод, что если данная система имеет ровно четыре решения, то точки, соответствующие этим решениям, должны располагаться или на осях (по две на каждой), или на биссектрисах (вновь по две на каждой). В противном случае если точка, соответствующая решению, расположена иначе, то, отражая ее относительно всех четырех осей симметрий, мы получим восемь (вместе с данной точкой) решений. Таким образом, окружность, соответствующая второму уравнению, должна проходить или через точку $(1,0)$, или через точку $(1/4, 1/4)$, то есть ее радиус или 1, или $\sqrt{2}/4$, откуда $a = -1/4$ или $a = -1/32$. Для полноты решения необходимо еще обосновать, что при каждом из найденных a , имеется, в самом деле, ровно четыре известных нам решения, чтобы снять обвинения (справедливые) в том, что мы апеллируем к рисунку, ссылаемся на рисунок с изображением графика функции $(\sqrt{|u|} + \sqrt{|v|}=1)$, о которой ничего не знаем (пока), кроме наличия у нее четырех осей симметрии. Самое простое, перейдя к переменным $z = \sqrt{|u|}$, $t = \sqrt{|v|}$, решить две системы:

$$\begin{cases} z + t = 1 \\ z^4 + t^4 = 18 \end{cases}$$

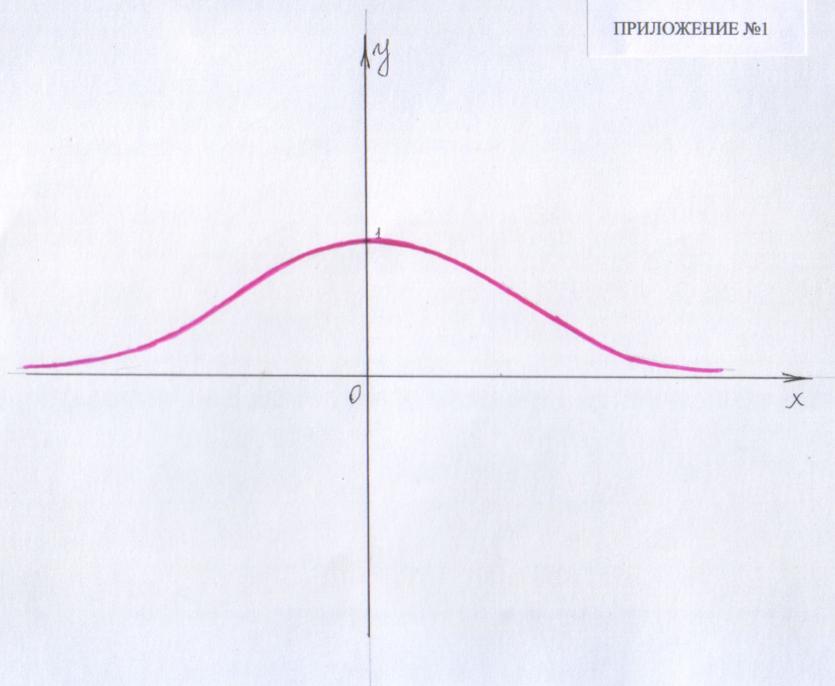
и

$$\begin{cases} z + t = 1 \\ z^4 + t^4 = 1 \end{cases}$$

Ответ: $a=-1/4$, $a=-1/32$.

Замечание. Стоит обратить внимание на характерную ситуацию, часто возникающую при использовании тех или иных графических интерпретаций. Несмотря на то, что они полезны всегда (вероятно, впервые мы отваживаемся на всеобщую рекомендацию), с их помощью ответ может быть получен наглядно и быстро, нередки случаи, когда одних графических рассмотрений оказывается недостаточно и для полного обоснования требуются еще те или иные аналитические методы.

ПРИЛОЖЕНИЕ №1



ПРИЛОЖЕНИЕ №2

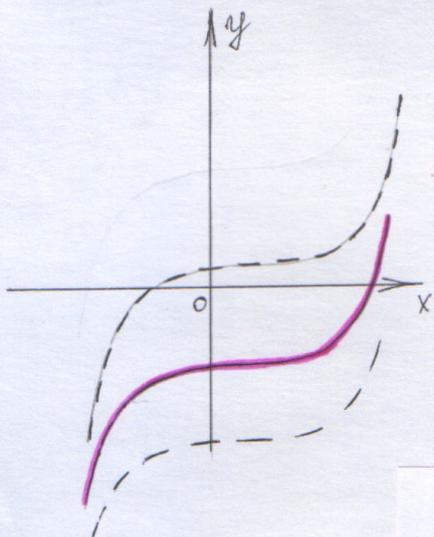


РИСУНОК №1

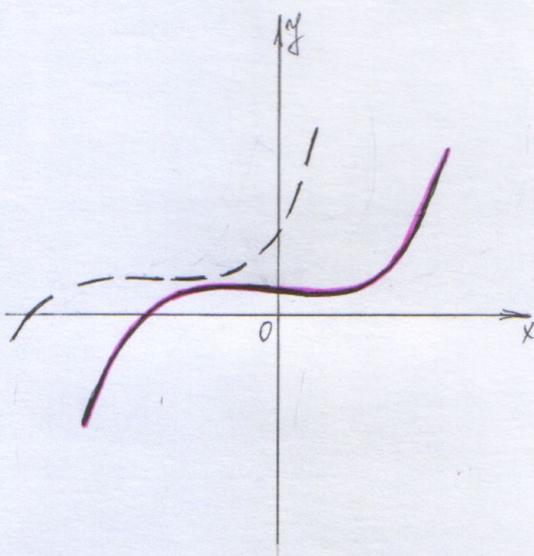
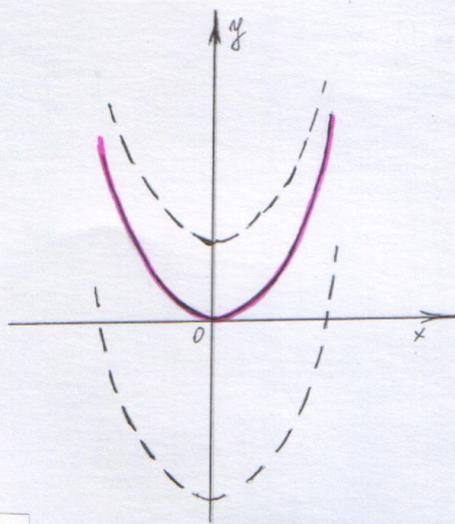
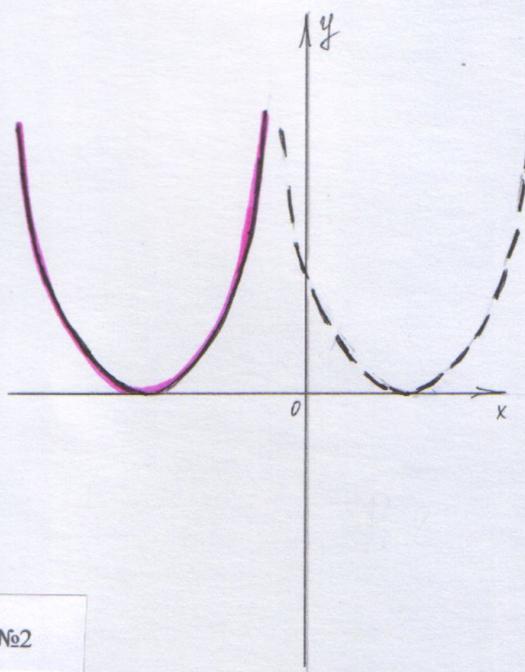


РИСУНОК №2



ПРИЛОЖЕНИЕ №3

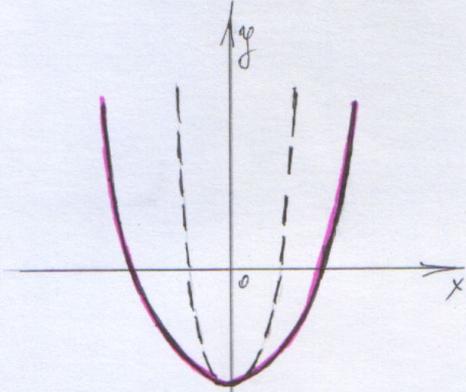


РИСУНОК №1

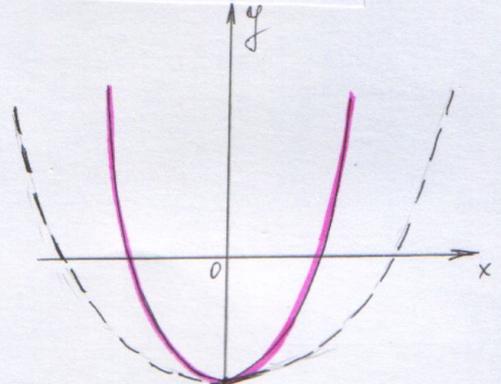


РИСУНОК №2

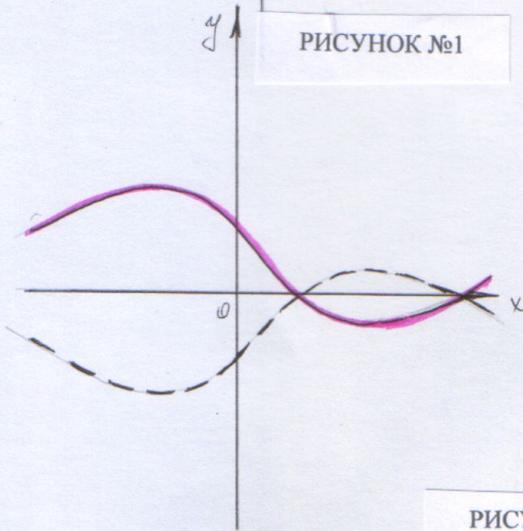


РИСУНОК №3

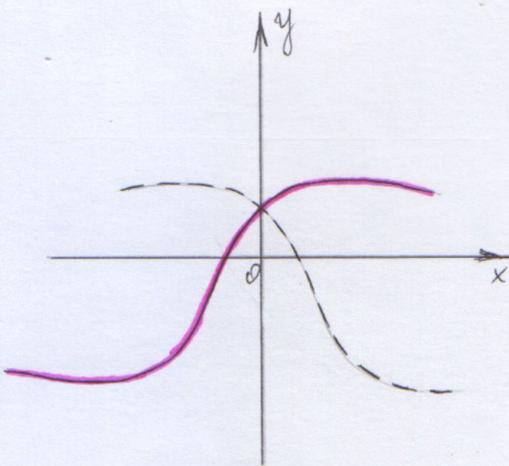
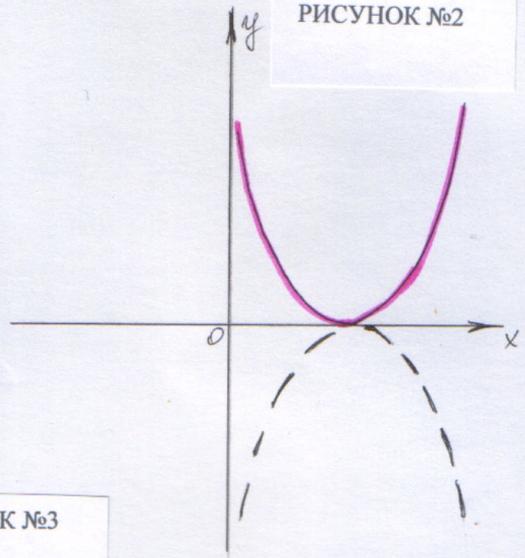
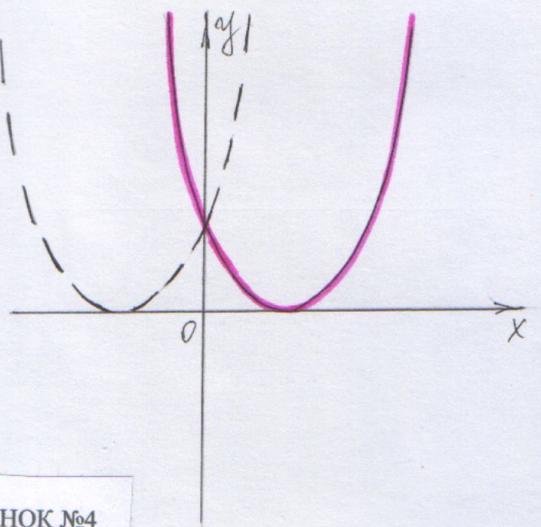


РИСУНОК №4



ПРИЛОЖЕНИЕ №4

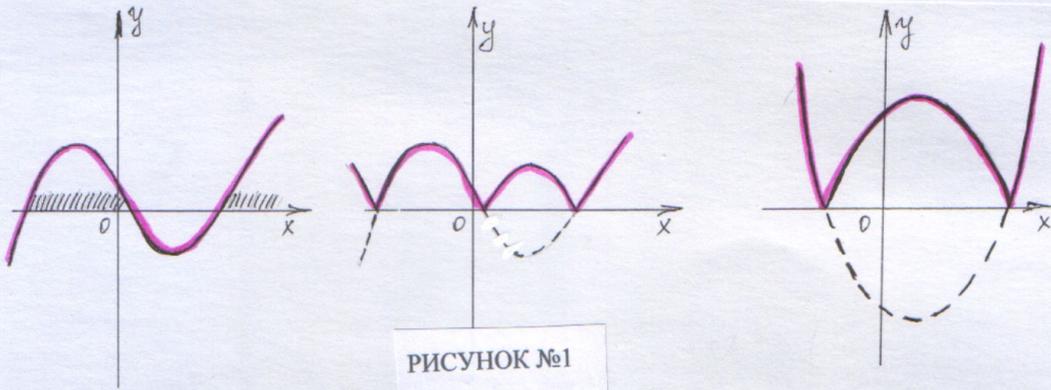


РИСУНОК №1

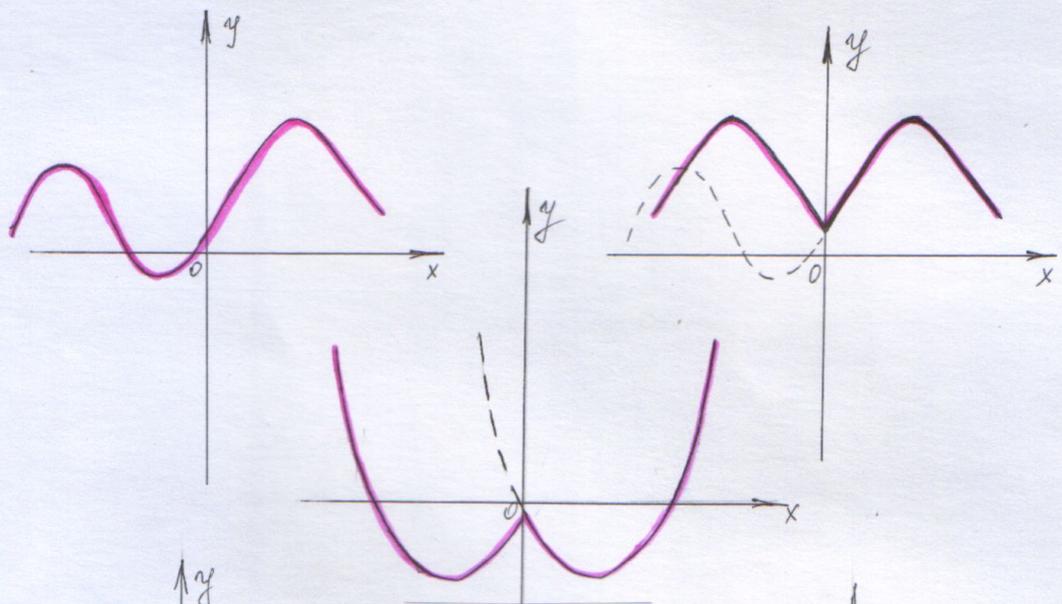


РИСУНОК №2

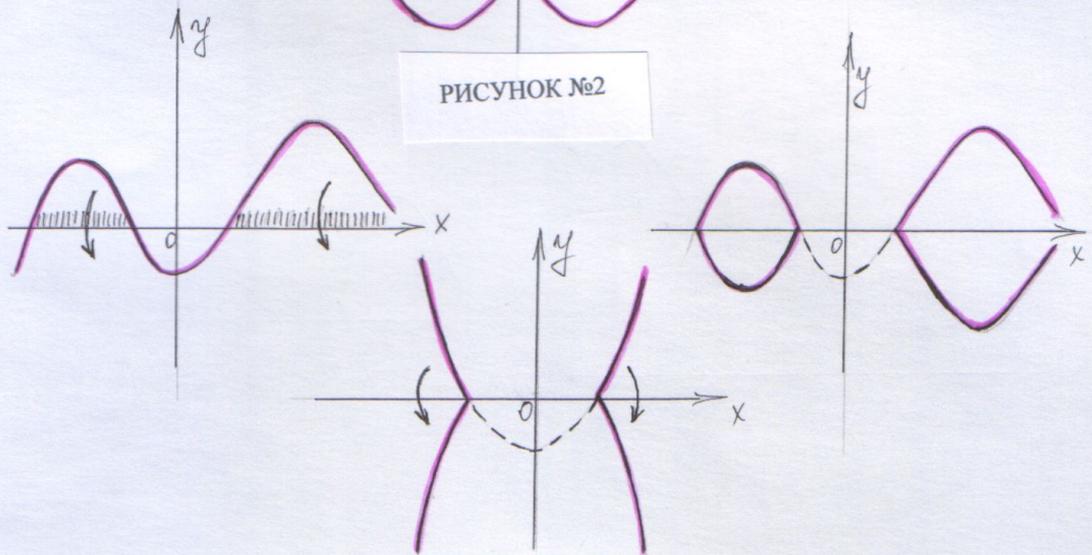
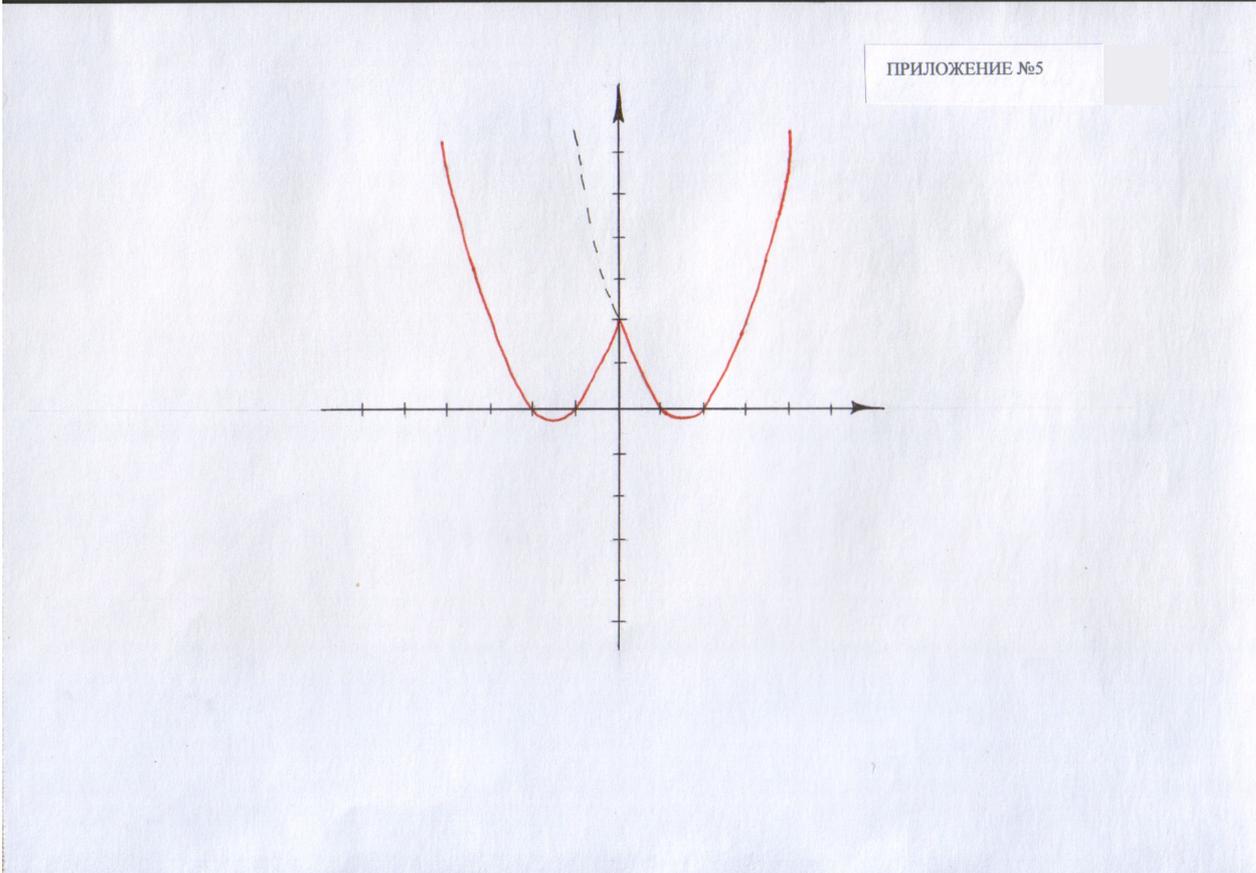
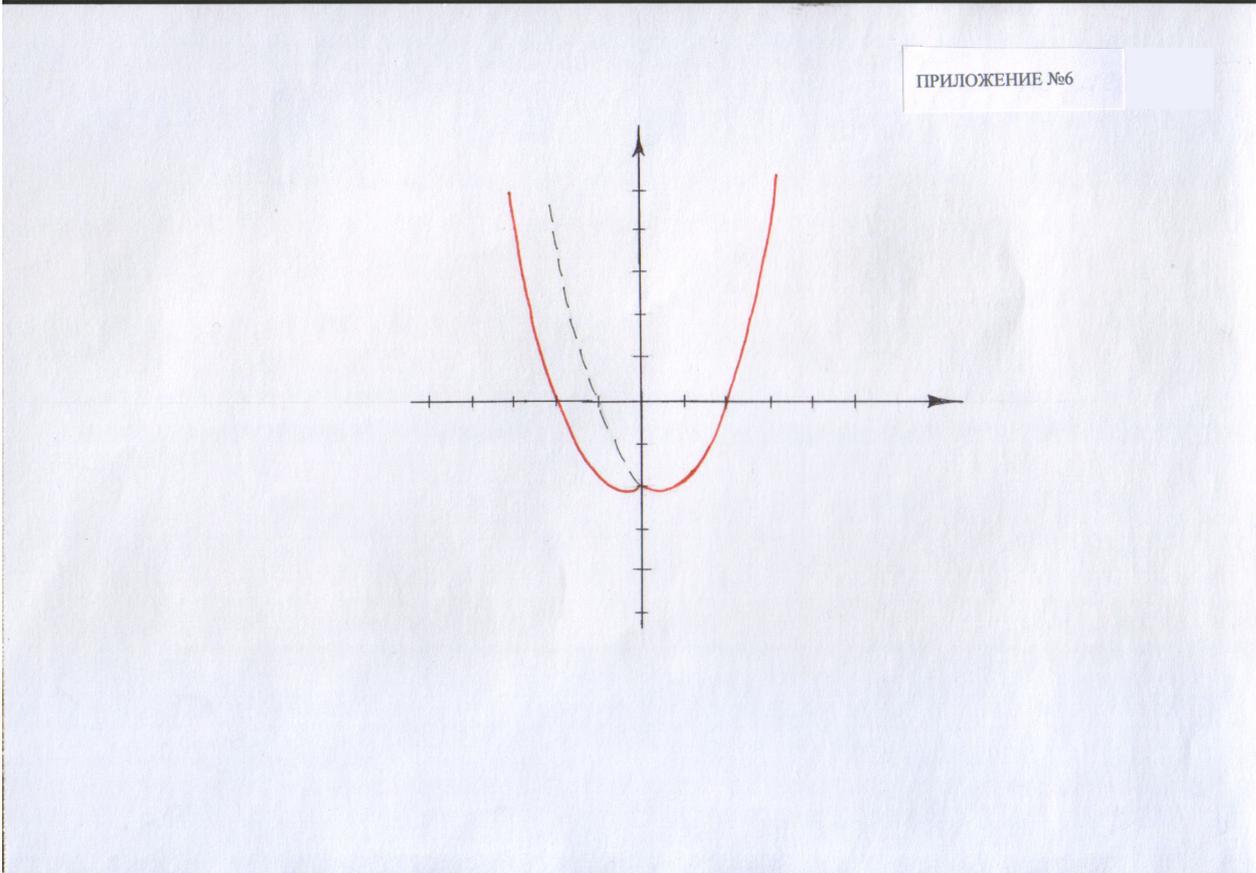


РИСУНОК №3

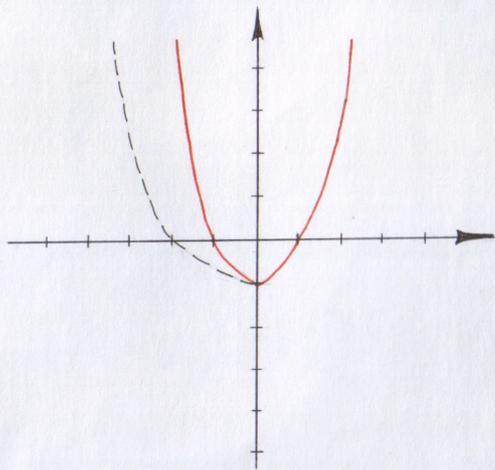
ПРИЛОЖЕНИЕ №5



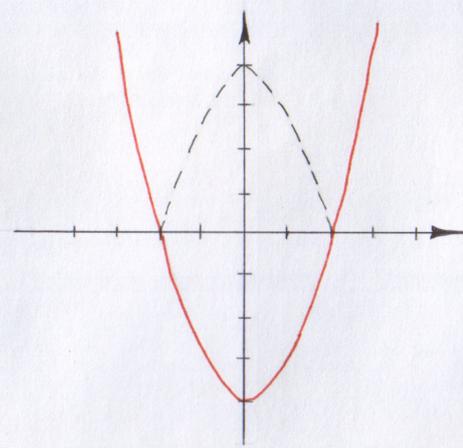
ПРИЛОЖЕНИЕ №6



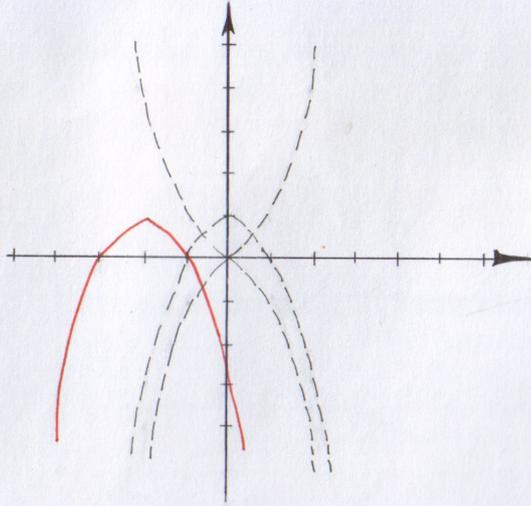
ПРИЛОЖЕНИЕ №7



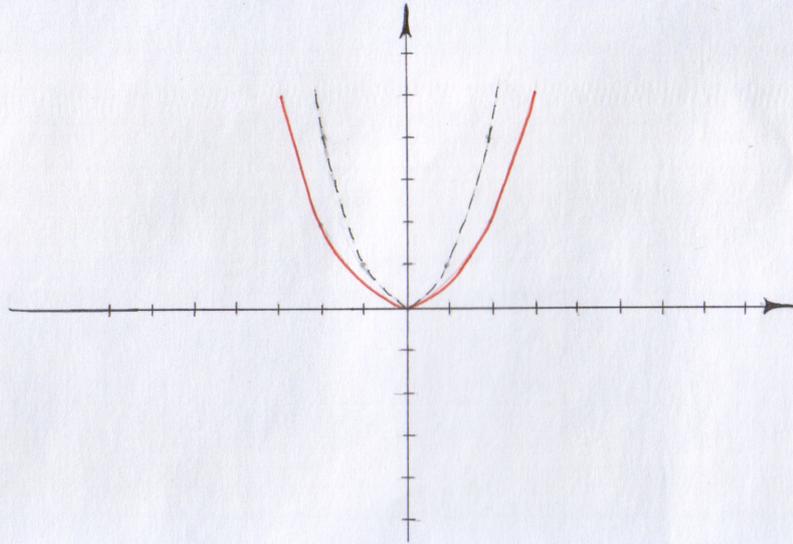
ПРИЛОЖЕНИЕ №8



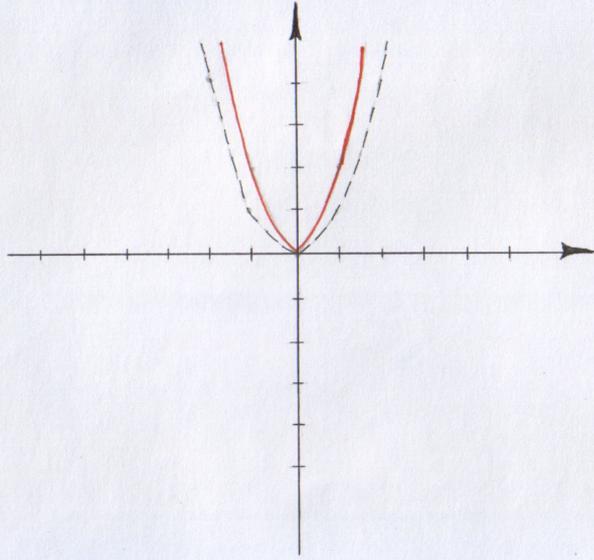
ПРИЛОЖЕНИЕ №9



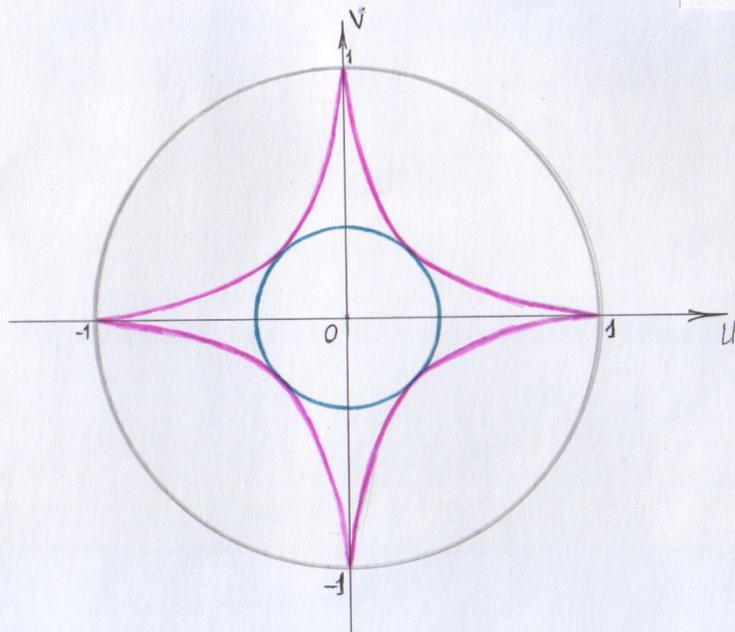
ПРИЛОЖЕНИЕ №10



ПРИЛОЖЕНИЕ №11



ПРИЛОЖЕНИЕ №12



При написании этой работы были использованы следующие материалы:

- 1) Факультативный курс по математике 7-9 класс. Составитель И. Л.Никольская.
- 2)Трудные разделы школьной математики
Авторы Ж. А Черняк и А. А. Черняк.
- 3)Факультативный курс по математике.
Решение задач.
Авторы И. Ф. Шарыгин, В. И. Голубев.
- 4) Математика
Автор В. Е. Смыкалова.
- 5) Методическое пособие по математике
Всероссийская школа математики и физики «Авангард»

