Муниципальное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №3

«Всё, что знаю о фракталах».

****

Выполнила: ученица 9 класса «А»

Солнышкина Ирина Юрьевна

Руководитель: учитель математики

Крюченкова Вера Михайловна

г. Борисоглебск

2011 год

**Цели проекта:**

1. Доказать на примере фракталов, что математика является развивающейся наукой.
2. Показать на примере фракталов взаимодействие с другими науками.
3. Создать свой фрактал.

**Задачи:**

1. Изучить фракталы и их свойства.
2. Понять принцип построения фракталов
3. Рассмотреть применение фракталов в других науках.

**СОДЕРЖАНИЕ**

1. **Введение.**
   1. История появление фрактальной математики.
   2. Актуальность темы
   3. Классификация фракталов:
      1. Геометрические фракталы.
      2. Алгебраические фракталы.
      3. Стохастические фракталы.
   4. Природные фракталы.
   5. Литературные.
2. **Список используемой литературы.**
3. **Приложения.**

***История появления фракталов.***

***Математика, если на нее правильно***

***посмотреть, отражает не только***

***истину, но и несравненную красоту.***

***Бертранд Рассел.***

 Фрактальное множество - самоподобная структура, один из « горячих» объектов современной науки.

Подобные объекты были известны довольно давно, но настоящий интерес к ним появился после активной популяризаторской деятельности Бенуа Мандельброта, работающего в корпорации IBM.

Понятия фрактал и фрактальная геометрия, появившиеся в конце 70-х, с середины 80-х прочно вошли в обиход математиков и программистов. Слово фрактал было предложено Бенуа Мандельбротом в 1975 году для обозначения нерегулярных, но самоподобных структур, которыми он занимался. Рождение фрактальной геометрии принято связывать с выходом в 1977 году книги Мандельброта «The Fractal Geometry of Nature». В его работах использованы научные результаты других ученых, работавших в период 1875-1925 годов в той же области (Пуанкаре, Фату, Жюлиа, Кантор, Хаусдорф). Но только в наше время удалось объединить их работы в единую систему.

1977 год можно считать началом переворота, который геометрия фракталов производит не только а в математике и в физике, но и во всем естествознании. И даже уже в обществоведении, где лингвисты открыли общие фрактальные закономерности в строении самых разных языков. И все это - в считанные годы! Таких темпов общенаучной экспансии не знает история  в науке.

***Классификация фракталов.***

Что же такое фрактал. Сам Мандельброт вывел слово fractal от латинского слова fractus, что означает разбитый (поделенный на части). И одно из определений фрактала - это геометрическая фигура, состоящая из частей и которая может быть поделена на части, каждая из которых будет представлять уменьшенную копию целого (по крайней мере, приблизительно).

Фракталы – это фигуры с бесконечным количеством деталей. При увеличении, они не становятся более простыми, а остаются такими же сложными, как до увеличения. В природе, вы можете находить их повсюду. Любая ветка дерева, при увеличении, напоминает целое дерево. Любой камень с горы напоминает целую гору. Теория фракталов была сначала разработана для изучения природы.

**Рукотворные и природные фракталы**.

К рукотворным относятся те фракталы, которые были придуманы учёными, они при любом масштабе обладают фрактальными свойствами. На природные фракталы накладывается ограничение на область существования — то есть максимальный и минимальный размер, при которых у объекта наблюдаются фрактальные свойства.

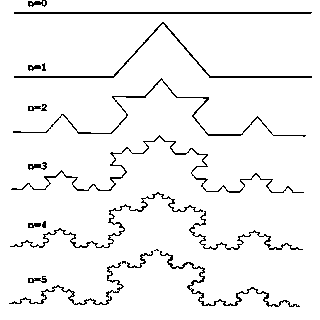
Фракталы делятся на геометрические, алгебраические и стохастические.

**Геометрические фракталы.**

*Именно с них и начиналась история фракталов.* Этот тип фракталов получается путем простых геометрических построений.

Фракталы этого класса самые наглядные. В двухмерном случае их получают с помощью некоторой ломаной (или поверхности в трехмерном случае), называемой генератором. За один шаг алгоритма каждый из отрезков, составляющих ломаную , заменяется на ломаную - генератор, в соответствующем масштабе. В результате бесконечного повторения этой процедуры, получается геометрический фрактал.

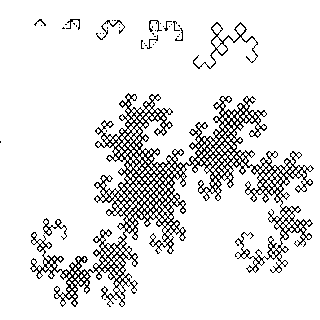
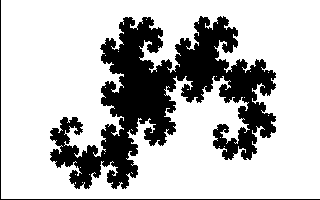
**Триадная кривая Коха**



Рассмотрим один из таких фрактальных объектов - триадную кривую Коха. Построение кривой начинается с отрезка единичной длины - это 0-е поколение кривой Коха. Далее каждое звено (в нулевом поколении один отрезок) заменяется на образующий элемент, через n=1. В результате такой замены получается следующее поколение кривой Коха. В 1-ом поколении - это кривая из четырех прямолинейных звеньев, каждое длиной по 1/3. Для получения 3-го поколения проделываются те же действия - каждое звено заменяется на уменьшенный образующий элемент. Итак, для получения каждого последующего поколения, все звенья предыдущего поколения необходимо заменить уменьшенным образующим элементом. Кривая n-го поколения при любом конечном n называется предфракталом. На рисунке представлены пять поколений кривой. При

n ∞ кривая Коха становится фрактальным объектом.

Построение "дракона" Хартера-Хейтуэя. Дракон Хартера-Хейтуэя



∞∞

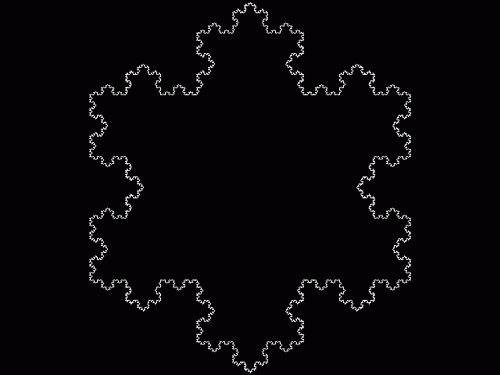
Для получения другого фрактального объекта нужно изменить правила построения. Пусть образующим элементом будут два равных отрезка, соединенных под прямым углом. В нулевом поколении заменим единичный отрезок на этот образующий элемент так, чтобы угол был сверху. Можно сказать, что при такой замене происходит смещение середины звена. При построении следующих поколений выполняется правило: самое первое слева звено заменяется на образующий элемент так, чтобы середина звена смещалась влево от направления движения, а при замене следующих звеньев, направления смещения середин отрезков должны чередоваться. На рисунке представлены несколько первых поколений и 11-е поколение кривой, построенной по вышеописанному принципу. Предельная фрактальная кривая (при n стремящемся к бесконечности) называется драконом Хартера-Хейтуэя.

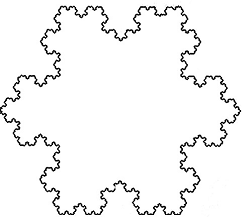
**Примерами кривых служат:**

кривая дракона; кривая Коха; кривая Леви; кривая Минковского; кривая Пеано.

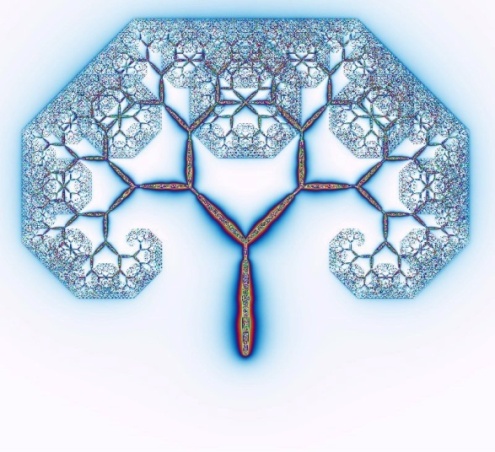
**К геометрическим фракталам также относят фракталы, получаемые похожими процедурами, например:**

* снежинка Коха;
* треугольник Серпинского;
* ковер Серпинского;
* губка Менгера;
* дерево Пифагора.





Снежинка Коха



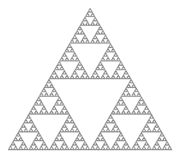
Дерево Пифагора

Треугольник Серпинского — фрактал, один из двумерных аналогов множества Кантора предложенный польским математиком Серпинским в 1915 году.

Также известен как «решётка» или «салфетка» Серпинского.

построение 

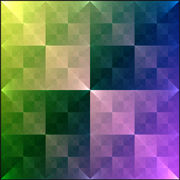
Треугольник Серпинского можно получить по следующему алгоритму:

 Взять три точки на плоскости, и нарисовать треугольник.

Случайно выбрать любую точку внутри треугольника, и продвинуться на половину расстояния от этой точки к любой из трех вершин треугольника.

Отметить текущую позицию.

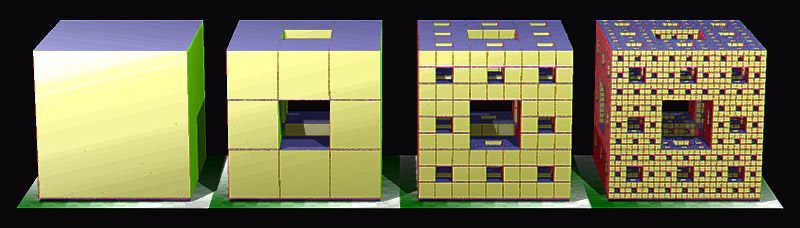
Повторить с шага 2.

 Ковер Серпинского — фрактал, один из двумерных аналогов множества Кантора предложенный польским математиком Вацлавом Серпинским. Также известен как квадрат Серпинского.

*Построение.*

Берётся сплошной квадрат, разрезается на 9 равных квадратов и удаляется внутренность центрального квадрата. На втором шаге удаляется 8 центральных квадратов из 8 оставшихся квадратов и т. д. После бесконечного повторения этой процедуры, от сплошного квадрата остается замкнутое подмножество — ковёр Серпинского.

Губка Менгера — геометрический фрактал, один из трёхмерных аналогов ковра Серпинского.



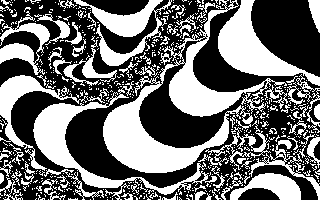
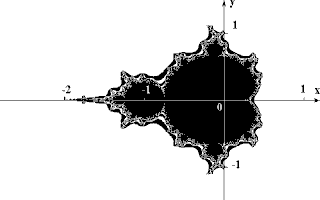
*Построение*

Куб K0 с ребром 1 делится плоскостями, параллельными его граням, на 27 равных кубов. Из куба K0 удаляются центральный куб и все прилежащие к нему по двумерным граням кубы этого подразделения. Получается множество K1, состоящее из 20 оставшихся замкнутых кубов «первого ранга». Поступая точно так же с каждым из кубов первого ранга, получим множество K2, состоящее из 400 кубов второго ранга. Продолжая этот процесс бесконечно, получим бесконечную последовательность

И эти сложные математические объекты, создание которых невозможно без помощи компьютера, привлекают неизменный интерес людей, чрезвычайно от математики далеких, привлекают своей завораживающей и повторяющейся красотой, подобной очарованию сменяющих друг друга картинок в детском калейдоскопе. Последовательные сходных изображений погружают зрителя в волшебный ирреальный мир, кружат голову идеей бесконечного повторения, тождества и подобия — в масштабе, пространстве и времени.

***Алгебраические фракталы****.*

Алгебраические фракталы менее наглядные, зато их построение сводится к одной формуле, которой простой можно назвать с большой натяжкой. Но все алгебраические фракталы можно рассмотреть на классическом примере – множестве Мандельброта.



Множество Мандельброта Граница, увеличенная в 200 раз

Наиболее изучен двухмерный случай. Нелинейные динамические системы могут обладать несколькими устойчивыми состояниями. Каждое устойчивое состояние (аттрактор) обладает некоторой областью начальных состояний, при которых система обязательно в него перейдёт. Таким образом, фазовое пространство разбивается на области притяжения аттракторов.

Если фазовым является двухмерное пространство, то, окрашивая области притяжения различными цветами, можно получить цветовой фазовый портрет этой системы (итерационного процесса). Меняя алгоритм выбора цвета, можно получить сложные фрактальные картины с причудливыми многоцветными узорами. Неожиданностью для математиков стала возможность с помощью примитивных алгоритмов порождать очень сложные нетривиальные структуры.

Алгоритм построения достаточно прост и основан на итеративном выражении:

z i + 1 = F(z), где F(z) — какая-либо функция комплексной переменной.

Также можно изменить вид фрактала, если вести контроль значения z, например:

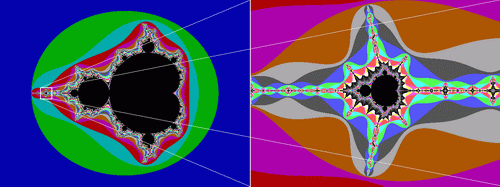
Действительная часть z меньше определённого числа;

Мнимая часть z меньше определённого числа;

И мнимая и действительная части z меньше какого-либо числа;

*Другие способы*.

И, наконец, ещё один интересный эффект — изменение палитры. После того, как изображение построено, можно циклически изменять цвета закрашенных областей, и тогда и без того удивительное изображение «оживёт» на экране.

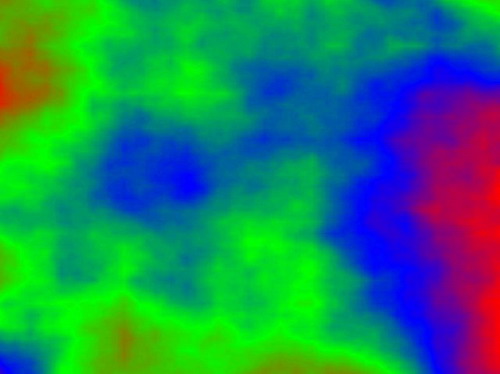


**Примеры алгебраических фракталов:**

множество Мандельброта; множество Жюлиа; бассейны Ньютона;

***Стохастические фракталы.***

Кривая Коха, как бы ни была похожа на границу берега, не может выступать в качестве её модели из-за того, что она всюду одинакова, самоподобна, слишком «правильна». Все природные объекты создаются по капризу природы, в этом процессе всегда есть случайность. Фракталы, при построении которых в итеративной системе случайным образом изменяются какие-либо параметры, называются стохастическими. К этому классу фракталов относится и фрактальная монотипия, или стохатипия. Термин «стохастичность» происходит от греческого слова, обозначающего «предположение».



Плазма

**Стохастические фракталы** получаются в том случае, если в итерационном процессе случайным образом менять какие-либо его параметры. При этом получаются объекты очень похожие на природные - несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д.

Рекурсивный алгоритм для построения плазмы следующий:

Присвоить значение оттенка для 4х углов прямоугольника.

Высчитать средние значения оттенков для середин сторон и центра используя среднее арифметическое.

Случайно изменить центральный оттенок. Величина изменения должна зависеть от размеров прямоугольника.

Разделить прямоугольник на 4 равные части, в углах которых будут полученные средние значения.

Также существуют рандомизированные фракталы (от англ. random – случайный) Рандомизованный фрактал строится по обычному алгоритму, за исключением того, что при вычислении на каждой итерации добавляются случайные величины.

Заметим, что в действительности требуется не так много итераций, чтобы объект воспринимался как фрактальный. Стремящийся к большим и бесконечно большим числам человеческий разум в реальности вполне удовлетворяется числом итераций, лежащим где-то между психологическими константами три и семь. Снежинка Коха на нашем рисунке представлена пятью приближениями, у дерева можно обнаружить семь развилок, что уже убеждает нас во фрактальности объекта.

Итак, из определения стохастических фракталов следует, что все создаваемые нами графические объекты (буквы, цифры, иероглифы, геометрические фигуры, рисунки) являются фракталами, которые можно задать уравнениями, пусть даже и очень сложными. Таким образом, решена одна из целей моей работы – создание фрактала

**Фракталы в биологии.**

После того, как термин «фрактал» был введен, стало понятно, что множество природных объектов обладают фрактальным строением — это и ветки деревьев, повторяющие более крупные ветви, повторяющие ствол, и снежинки, и кровеносные пути и нервы, разветвляющиеся на более мелкие пути, которые ветвятся на еще более мелкие, и карта мозговых полушарий, да и любая карта, при увеличении масштаба превращающаяся в иную карту, фрагмент которой при следующем увеличении есть еще одна схожая карта, и т.д.

Красота фракталов двояка:

она услаждает глаз ( и слух), о чем свидетельствует выставка фрактальных изображений, организованная группой математиков под руководством Пайтгена и Рихтера. "Красота фракталов";

и другой, более абстрактный или возвышенный, аспект красоты фракталов, открытый, умственному взору , В этом смысле фракталы прекрасны красотой трудной математической задачи.

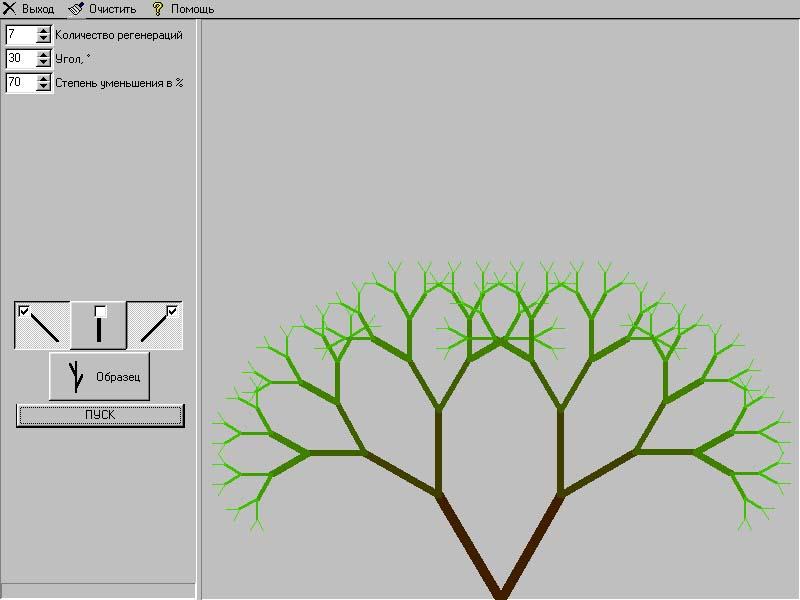
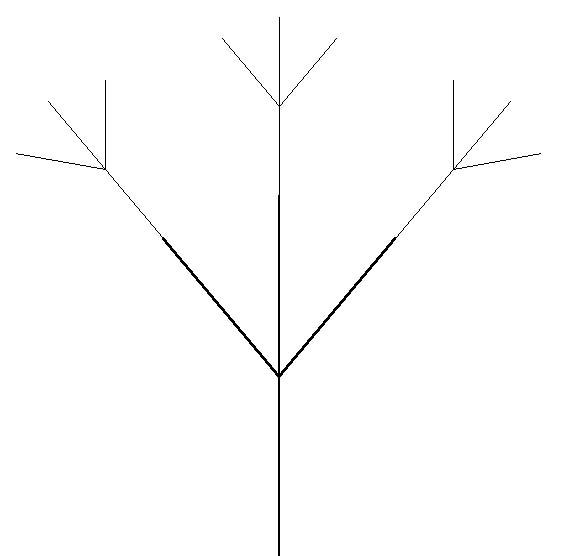
  Но Фрактальную геометрию в основном использовали только математики и Физики. Вот появилась идея использовать принципы фрактальной геометрии в биологии.

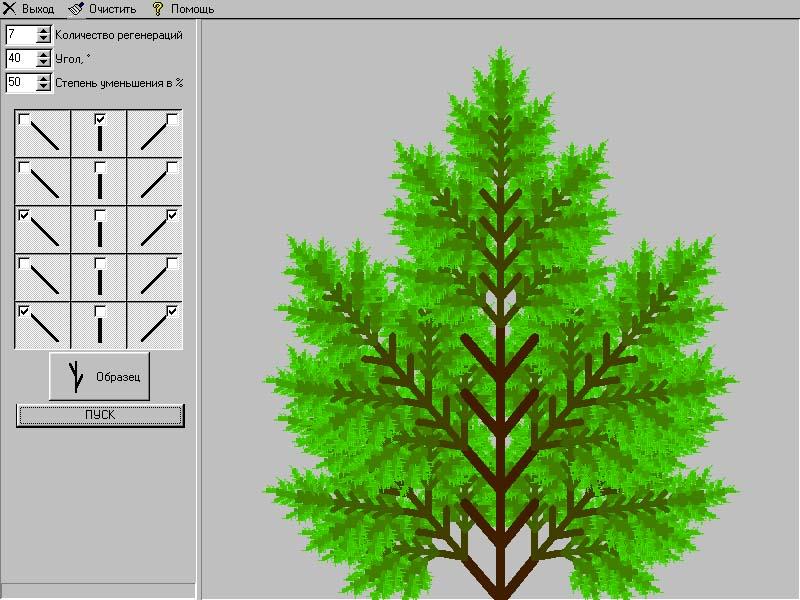
Исходя из того, что ***Фракталы в неживой природе отображают процесс разрушения*** *(****энтропия увеличивается),******а в живой природе - процесс созидания (энтропия уменьшается*).**

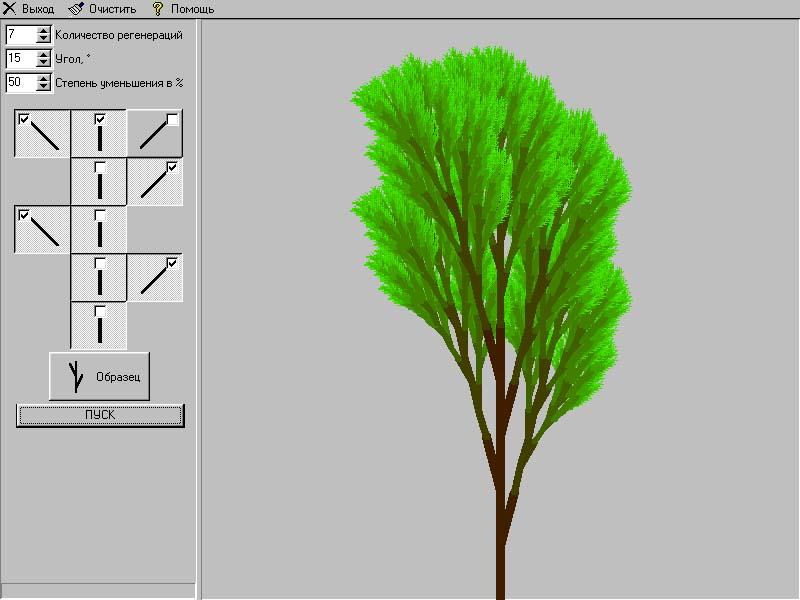
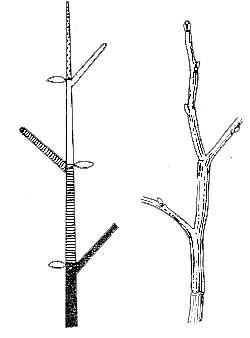
   Термодинамические процессы в живой природе идут по пути уменьшения энтропии системы, увеличения организованности объектов. Эти свойства являются фундаментальными для живой природы. Другие свойства живого - это рост и развитие. То есть живой объект постепенно разворачивается в пространстве и времени, увеличивая свои размеры и массу. (береговая линия - результат разрушения неких неживых тел (пород)). Исходя из выше сказанного, мы предположили - в живой природе можно наблюдать фрактальные явления, а можно попытаться их построить. На первом этапе попробовать проследить фрактальные явления там, где они сами напрашиваются на реализацию. В биологии при изучении роста растений была выявлена такая закономерность как "Ветвление".

            Ветвление возникло в процессе эволюции тела растений еще до появление органов. .

            .



            . 



        Существуют два вида роста первичный рост и вторичный рост.

Первичный рост происходит вблизи верхушечных корней и стеблей. Он и связан главным образом с удлинением тела растений. В ходе первичного роста образуются первичные ткани, составляющее первичное тело растения. Примитивные,  также и многие современные сосудистые растения состоят целиком из первичных тканей.

            Кроме первичного у многих растений происходит дополнительный рост, вызывающий утолщение стебля. Он называется вторичным и формирует вторичные проводящие ткани. Вторичные проводящие вместе с пробковой тканью составляют вторичное тело растения.

            Вторичный рост сопровождается изменением цвета стебля. И в зависимости от количества вторичной проводящей ткани окрас темнеет.

В реальном мире мы не встретим геометрических форм, соответствующих канонам евклидовой геометрии, Его геометрическая первооснова оказывается фрактальной. Объединив идею фрактальности с идеей формообразующей случайности, современная геометрия совершила гигантский качественный скачок. Впервые за свою историю математика оказалась в состоянии правильно отражать мир во всем многообразии его сложных форм, не прибегая  к многоярусным нагромождениям все более абстрактных и искусственных интеллектуальных конструкций. В этом  плане особенно показательно то, как фрактальная геометрия рисует мир. Здесь человек научился творить многообразие геометрических форм наподобие самой природы. Пусть для начала - лишь на экране дисплея.

            Кроме того, модели фрактального роста быстро вышли за рамки компьютерной графики. Они оказались феноменально продуктивны во многих областях физики и химии. Так, они вносят теоретическую ясность во многие проблемы, связанные с прочностью материалов.          Даже загадочный феномен шаровой молнии удалось смоделировать на фрактальных структурах из тонкой проволоки. В помещении поведение этой конструкции аналогично поведению залетевшей шаровой молнии. Если материальная модель столь эффективна , то из этого прямо следует эффективность представлений о фрактальной структуре самих шаровых молний.

**Фракталы в литературе: в поисках утраченного оригинала**

Некоторые произведения искусства, в том числе литературы, также могут быть рассмотрены как фракталы, вспомним хотя бы мечту о Книге книг — книге, состоящей из иных книг, — если это и не фрактал, то первая к нему итерация.

Попытаемся сформулировать, как можно соотнести фракталы с произведениями литературы. Мы будем рассматривать фрактал исключительно как произведение искусства, оставляя за рамками нашего исследования, определяющие математические формулы. Тогда характерными чертами фрактала будут следующие:

1) часть его неким образом подобна целому (в идеале эта последовательность подобий распространяется на бесконечность, хотя никто никогда не видел действительно бесконечной последовательности фрактальных итераций);

2) его восприятие происходит по последовательности вложенных уровней.

Пытаясь определить литературные фракталы, мы встречаемся с некоторыми принципиальными трудностями: во-первых, литературный текст, по сравнению с произведением визуального искусства, линеен, существует направление его прочтения от начала до конца. Впрочем, с этой особенностью текста успешно справляются как создатели палиндромов, закручивающих текст в двустороннее обращаемое кольцо, так и создатели интерактивной литературы, предлагающие произвольно или по некоторому закону изменять порядок прочтения фрагментов текста.

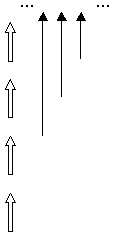
Еще одной особенностью текста является его конечность. Эта особенность свойственна и визуальным работам, и именно фракталы вывели визуальные произведения за рамки формальной конечности.

Как же можно создать бесконечный текст?

**Бесконечные повторяющиеся тексты и их модификации**

Самыми простым бесконечным текстом будет текст из бесконечного количества дублирующихся элементов, или куплетов, повторяющейся частью которого является его «хвост» — тот же текст с любым количеством отброшенных начальных куплетов. Схематически такой текст можно изобразить в виде неразветвляющегося дерева или периодической последовательности повторяющихся куплетов. Единица текста — фраза, строфа или рассказ — начинается, развивается и заканчивается, возвращаясь в исходную точку, точку перехода к следующей единице текста, повторяющей исходную. Видно, что отсечение «головы» — любого количества начальных единиц, ничего не изменит, и «хвост» будет в точности совпадать с целым текстом.

Неразветвляющееся бесконечное дерево тождественно самому себе с любого шага.



Среди таких бесконечных произведений — стихи для детей или народные песенки, как, например, стишок о попе и его собаке из русской народной поэзии, или стихотворение М.Яснова «Чучело - мяучело», повествующее о котенке, который поет о котенке, который поет о котенке:

Вот море,

А на море суша,

А на суше пальма,

А на пальме клоп сидит

И видит море,

А на море сyша…

Чучело-мяучело

На трубе сидело.

Чучело-мяучело

Песенку запело.

Чучело-мяучело

С пастью красной-красной —

Всех оно замучило

Песенкой ужасной.

Всем кругом от чучела

Горестно и тошно,

Потому что песенка

У него про то, что:

Чучело-мяучело

На трубе сидело:

В отличие от бесконечных куплетов, фрагменты фракталов Мандельброта все же не тождественны, а подобны друг другу, и это качество и придает им завораживающее очарование. Поэтому в изучении литературных фракталов встает задача поиска подобности, сходства (а не тождественности) элементов текста.

В случае бесконечных куплетов замена тождества на подобие была осуществлена двумя способами: 1) созданием стихов с вариациями и 2) «бесконечных» стихов с конечной последовательностью куплетов.

.

Итак, из определения стохастических фракталов следует, что все создаваемые нами графические объекты (буквы, цифры, иероглифы, геометрические фигуры, рисунки) являются фракталами, которые можно задать уравнениями, пусть даже и очень сложными. Таким образом, решена одна из целей моей

работы – создание фрактала.

Фракталы – ещё не до конца изученная область математики,

Фракталы находят всё большее применение в науке. Они описывают реальный мир даже лучше, чем традиционная физика или математика.

Броуновское движение - это, например, случайное и хаотическое движение частичек пыли, взвешенных в воде. Этот тип движения, возможно, является аспектом фрактальной геометрии, имеющий наибольшее практическое использование. Случайное броуновское движение имеет частотную характеристику, которая может быть использована для предсказания явлений, включающих большие количества данных и статистики.

К примеру, Мандельброт предсказал при помощи броуновского движения изменение цен на шерсть.

Исследуя фракталы, мы приходим к выводу, что математика развивается и активно взаимодействует с другими науками. Другие науки также оказывают влияние на математику

**ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА**

1. С. К.Абачиев Концепция современного естествознания. Балашиха - 1998.

2.Р. Баас, М. Фервай, Х. Гюнтер Delphi 5: для пользователей :пер. с нем. - Издательская группа BHV, 2000г.

3.Г. П. Яковлев, В. А. Челомбитько Ботаника. М. 1990г.

4.Википедия – свободная энциклопедия.

5. Викицитатник – свободная энциклопедия

6.Забарянский С.Ф. Фрактальное сжатие изображений. - Компьютеры + программы. 1997. No.6(39).