**СКАЗКА О СТРАНЕ ЧИСЕЛ**

(идея взята из книги «Путешествие по Карликании и Аль-Джебре» \* ).

**Вступление**

Развитие понятия числа пронизывает весь школьный курс математики. В процессе обучения дети постепенно узнают о новых числах. Сначала о натуральных, затем о дробных, отрицательных, иррациональных. К середине восьмого класса они завершают знакомство с действительными числами. У школьников складывается впечатление, что других чисел, кроме действительных, не существует. Таким образом, пытливый ум подростка не получает пищи для дальнейших открытий.

Сказка о стране Чисел дает возможность пройти путь развития понятия числа чуть дальше, чем это происходит в школе и оставляет простор для творчества.

**Часть I**

Давным-давно, в глубокой древности, жили-поживали **натуральные** числа. Они помогали людям выполнять арифметические действия: сложение, вычитание, умножение, деление и даже более сложные - возведение в степень и извлечение корня. Правда, вычитание, деление и извлечение корня не всегда выполнялось: результат не попадал в **множество** натуральных чисел. Числа много и честно трудились, в любую минуту приходя на помощь людям, но очень страдали от того, что не все у них получается.

Однажды в страну Чисел пришел незнакомец – **Координатный Луч**. Он

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**\*Левшин В. А**., **Александрова Э. Б.** Путешествие по Карликании и Аль-Джебре: научно-художественное издание. – М.: Дет. лит., 1991

предложил всем натуральным числам поселиться на одной длинной-предлинной улице, у которой есть начало, но нет конца. Натуральные числа решили последовать совету незнакомца, но никто из них не соглашался жить на окраине. Тогда **Единица** попросила слева от себя построить всем миром дом для маленькой невзрачной цифры **ноль**. Числа согласились. Ноль, хотя и не натуральное число, а только цифра, очень необходим для записи многих чисел, таких как 10, 305, 1000000 и других.

Ах, как заважничала единица, гордая от того, что ее предложение было принято единогласно! Она стала толстая и внушительная, построила себе самый большой и красивый дом. Расстояние от скромного жилища нолика до этого огромного дома назвали **единичным отрезком**.

Все остальные натуральные числа сделали расстояние между своими домами таким же, как единичный отрезок. Они очень гордились своей прямой, как стрела, улицей, на которой поднялись через равные промежутки красивые дома. Нумерация каждого дома соответствовала тому натуральному числу, которое в нем жило. Эту улицу стали называть **числовым лучом**, а иногда в честь незнакомца координатным лучом.

Жизнь вошла в свое привычное русло, числа по-прежнему помогали людям. Но три действия: вычитание, деление и извлечение корня так и остались не всегда выполнимыми.

Проблему деления натуральные числа смогли решить. Разрабатывая земельные участки между своими домиками, они обнаружили там **дроби**.

Интересный вид у этих новых жителей страны Чисел. Казалось бы два обычных натуральных числа, но между ними – перекладина, **дробная черта**. **Знаменатель *дроби***, тот что внизу, держит над собой эту перекладину, **числитель**, как акробат, балансирует над ней, например 

Натуральным числам понравились дроби. Им тоже захотелось иногда представить себя в таком же виде. Для этого каждое натуральное число приобрело себе дробную черту: вниз, в знаменатель, ставило единицу, а само забиралось наверх, в числитель, например Единица от такого унижения похудела, осунулась, стала маленькой и неприметной. Правда, иногда ей удавалось перехитрить натуральное число и самой встать в числитель. Тогда даже очень большое натуральное число становилось очень маленьким дробным, гораздо меньше самой единицы, например 

В дальнейшем, поняв, что она может творить чудеса, единица превратилась в чародея-волшебника. Но об этом другая история.

На числовом луче стало тесновато, так как между натуральными числами поселились дробные. Но, как говорится, в тесноте, да не в обиде. Подружившись с натуральными числами, дробные открыли им страшную тайну: «Дробная черта – это знак деления числителя на знаменатель». Например, обыкновенная **дробь**  обозначает результат деления числа 3 на число 5. Этот результат можно записать в виде десятичной **дроби** 0,6. Ура! Операция деления выполнима.

В стране чисел праздник. На почетном месте дробная черта и знак деления. Они с огромным интересом смотрят, как натуральные числа, разбившись на пары, составляют дроби, выполняют деление числителя на знаменатель – и дробь из обыкновенной превращают в десятичную.

Первой на сцену выскочила нарядная пятёрочка. Она тянет за собой подружку – число 4. Обыкновенная дробь  легко превращается в десятичную 1,25. Числа 5 и 4 меняются местами, получается дробь , а из неё десятичная 0,8. Довольная успехом, пятёрка приглашает для выступления своего правого соседа – число 6. Дробь быстро превращается в десятичную 1,2. Наступает очередь дроби . Но что это?! У десятичной дроби появляется бесконечный «хвост» из повторяющейся цифры 3, Наступает тишина. Оглянувшись вокруг, числа замечают, что «хвостатых» дробей очень много:  = 0,181818…;  = 0,428571428… Что делать? На помощь приходит грозный **Период**. Он быстро отрубает «хвосты», заковывает повторяющуюся цифру или группу цифр в круглые скобки. Получаются аккуратненькие **бесконечные периодические десятичные** дроби: = 0,(18); = 0,8(3); = 0,(428571). Снова играет музыка. Счастливые числа пускаются в пляс. Теперь никто никому не наступает на «хвост».

А дробная черта и знак деления, глядя на веселье, решили, что надо провести расследование и выяснить, когда обыкновенную дробь можно перевести в конечную десятичную дробь, а когда – в бесконечную периодическую.

Вычитание по-прежнему доставляло числам беспокойство. Ну что делать, когда надо из 3 вычесть 5? Не получается натуральное число. На помощь пришел ноль. Он уже подрос, перестал быть ноликом хулиганчиком, когда-то укравшим со склада знак умножения, что вызвало большой переполох. Теперь ноль стал умным, начитанным, думающим юношей. Он исследовал территорию около своего скромного жилища и сделал величайшее открытие: слева от него тоже есть числа! Они очень похожи на натуральные и дробные, живут на такой же бесконечной улице. Правда, удаляется эта улица от ноля влево. Все числа этой левой улицы носят на груди знак «минус». Жителей левой улицы назвали **отрицательными** числами, а правой – **положительными числами**.

Положительные числа тоже заказали себе отличительный знак – «плюс». Правда, они не всегда берут его с собой, гордясь тем, что все их знают и без знака как положительные. Самое главное, теперь из числа 3 легко вычесть число 5, получится число –2.Проблема вычитания решена!

Страна чисел с появлением дробных и отрицательных чисел стала огромной: ни конца, ни края не видно. Название ей придумали новое – **Множество Рациональных Чисел**, а улица, на которой продолжали жить числа, из луча превратилась в **Числовую прямую**. Натуральные числа не захотели раствориться в этом множестве и быть как все. Они объединились со своими противоположными числами, пригласили ноль и стали называться **Множеством Целых Чисел**. Как гордился ноль, что из маленькой неприметной цифры превратился во всеми уважаемое число! Теперь его дом в самом центре страны Чисел. Ноль с удовольствием появляется, когда надо сложить два противоположных числа, например –5 и +5, потому что

–5 + 5 = 0.

**Часть II**

(для старшеклассников)

Эта часть истории страны Чисел будет понятна тем, кто знает теорему Пифагора, умеет решать квадратные уравнения, знаком с координатной плоскостью и векторами.

Однажды в страну Чисел пришел восьмиклассник Коля. Он давно дружил с рациональными числами и часто наведывался к ним в гости.

Сегодня в школе Коля узнал о теореме Пифагора. Он легко с помощью этой теоремы вычислил длину диагонали прямоугольника со сторонами 3 и 4 см. Получилось 5 см. Действительно 52 = 32 + 42 (рис.10). А как получить длину диагонали квадрата со стороной 1см?

1

Рис. 10

Рис. 11

**4**

**3**

**5**

**1**

*x*

**1**

Коля обозначил длину диагонали за *x*, составил уравнение по теореме Пифагора *х2*=12 + 12, упростил правую часть и получил *х2*= 2 (рис.11). Осталось решить это уравнение, т.е. найти число, квадрат которого равен 2.

Мальчик не знал, как это сделать. Тогда он нарисовал квадрат со стороной 1см, провел диагональ, измерил ее и получил 1,4 см, подставил найденное число в уравнение. И что же?! Равенство 1,42 = 2 оказалось неверным, так как 1,42 = 1,96. Не обратиться ли за помощью к своим друзьям, жителям страны Чисел?

Числа быстро собрались на площади, в центре главной улицы, выслушали печальный рассказ мальчика и решили ему помочь. На помост поднялось число 2. Оно пригласило сначала число 1,41. Оказалось, что квадрат этого числа ближе к числу 2 (1,412 = 1,9881). Проверили квадрат числа 1,42 (1,422 = 2,0164). Опять неудача! Какое же теперь взять число, чтобы его квадрат был ближе к двойке!? Видимо, одно из тех, что стоит между 1,41 и 1,42. Например, 1,415. Получили хорошее приближение (1,4152 = 2,002225). Но это число больше двух! Проверили квадрат числа 1,414 (1,4142 = 1,999396). А этот результат меньше двух. Числа вместе с Колей друзьями упорно продолжали работать. Они проверяли все новые и новые числа, увеличивая количество знаков после запятой. Результат сравнивали с числом 2. Но точное равенство никак не могли получить.

Проверяя число 1,4142135623730950488016887242, числа поняли, что без грозного Периода не обойтись. Период много повидал на своем веку, любое рациональное число было ему подвластно, но здесь и он оказался бессилен. «Хвост» у числа извивался и удлинялся до бесконечности. Десятичные знаки если и повторялись, то хаотично, никак не создавая крепкую группу, которую можно было бы заключить в круглые скобки и назвать периодом. Пришлось признать, что в множестве рациональных чисел нет числа, квадрат которого равен 2: ведь **каждое рациональное число можно представить в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.**

Срочно придумали новый знак , **знак арифметического квадратногокорня,** и торжественно вручили его числу 2. Двойка с удовольствием забралась внутрь необычного сооружения. Получилась запись первого иррационального числа . Еще не смолкли бурные аплодисменты, как на помосте появилось еще одно иррациональное число, противоположное первому, число –.

Коля остался доволен: квадратное уравнение *х2* = 2 решено. Оно имеет даже два корня  и –. Правда, длина диагонали не может быть отрицательной, поэтому ответ задачи см. Мальчик поблагодарил друзей за помощь и распрощался с ними.

А на площадь потянулись и другие иррациональные числа. Они вылезали из глубоких извилистых нор, с трудом таща за собой длинные хвосты. Каждому иррациональному числу старались найти знак

– это решение уравнения *х3 =*7;

– это длина диагонали прямоугольника со сторонами 1 и 2;

π – число, равное отношению длины окружности к диаметру этой окружности, наградили почетным орденом, в виде буквы π (пи) греческого алфавита π ≈ 3,14159 (это я знаю и помню прекрасно).

Среди иррациональных чисел попадались и такие, которые невозможно обозначить никаким знаком. Например, 25,2255222555…

С появлением иррациональных чисел страна стала называться **Множеством Действительных Чисел**. На бескрайней улице не осталось ни одного свободного места. По большим праздникам, например, в День Знаний, каждое число зажигало свой небольшой фонарик, и улица превращалась в ярко освещенную, без единого тёмного пятнышка, прямую.

Старожилы страны Чисел, натуральные числа, с грустью вспоминали те времена, когда между их домами тянулись длинные темные пустыри, и радовались нынешнему свету и теплу.

Отшумели праздники, Коля перешел в девятый класс. Он слыл лучшим математиком в классе, брался за любую задачу и с легкостью ее решал.

Однажды, на уроке алгебры новый учитель вызвал его решать квадратное уравнение х2 = –1, Коля быстро ответил, что корней нет и сел на место. Учитель поправил его: «Действительных корней нет». У Коли тут же возник вопрос: «А что бывают и недействительные числа?».

«Да, - ответил учитель. – Называются они мнимые и комплексные, но в школьном курсе алгебры не предусмотрено их изучение».

Дома Коля открыл свой любимый энциклопедический словарь юного математика. На странице с буквой «К» он сразу же нашел статью, под названием **Комплексные числа**. Начал читать. Оказывается, уравнение *х2* = –1 имеет корень. Потому что есть число, квадрат которого равен –1. Это *i* – число особого рода, **мнимая единица**.

Коля продолжал увлеченно читать, даже сам сложил и умножил парочку комплексных чисел. Пробежал взглядом историю развития числа, отмечая про себя, что многое ему знакомо. А над парадоксом, возникающим в связи с решением кубического уравнения, надо будет поразмыслить на досуге.

Дальше пошли какие-то непонятные значки. Коля закрыл книгу и поспешил в Множество Действительных Чисел. Там он увидел, что числа радостно трудятся. Теперь они могут выполнить любую арифметическую операцию: сложение, вычитание, умножение, деление (кроме деления на ноль), возведение в степень и извлечение корня из неотрицательного числа.

Вежливо поздоровавшись, Коля попросил вычислить . Числа дружно ответили, что нельзя извлечь квадратный корень из отрицательного числа. Тогда гость напомнил им, что когда-то все были уверены, что нельзя из меньшего числа вычесть большее. Однако с открытием отрицательных чисел это стало возможным.

Юный исследователь рассказал о мнимой единице, числе i, квадрат которого равен –1, значит = *i*, а = 2*i*.

Вперед вышел старый ноль. Он вспомнил, как давным-давно с неба прямо на крышу его хижины спустились странные числа. Рядом с каждым числом, как полноправный множитель, шагала такая же буква *i*.

Инопланетяне вскоре исчезли, а в центре домика осталась отметина в виде небольшого тёмного круга. С тех пор дом несколько раз перестраивали, но круг возникал вновь и вновь, как заколдованный.

Старик привел Колю к этому месту. Мальчик посмотрел вверх и сквозь крышу увидел то, что скрывалось от непосвященного глаза, - улицу, очень похожую на Числовую Прямую. Только живут там мнимые числа вида *а⋅ i*, где *а* – действительное число, а *i* – мнимая единица. Улица называется **Мнимая Ось**.

Мнимые числа поприветствовали землян и пригласили полетать. Первым решилось действительное число 4, к нему спустилось мнимое число 2*i*. Два числа с разных улиц взялись с двух сторон за знак + и стремительно взлетели. На небе как будто вспыхнула новая звезда. Это зажгло свой фонарик комплексное число 4 + 2*i.* К нему от нуля потянулась стрела, обозначающая вектор (4: 2). Новый вектор заблестел в лучах заходящего солнца.

Чудеса продолжались. С вертикальной оси послышался звон колокольчика. Это число 6*i*, удобно устроившись на острие своего вектора

(0; 6), приглашало комплексное число 4 + 2*i* к сложению. Немного робея и теряясь от любопытных взглядов, число 4 + 2*i* согласно кивнуло. В полнейшей тишине все увидели прекрасный полет двух чисел. И вот засияла новая стрелка, а на ее конце вспыхнул фонарик – число 4 + 8*i*. Собравшиеся в один голос закричали: «Ура! Свершилось!». Две цивилизации нашли друг друга. Теперь у действительных чисел есть друзья – **мнимые числа**, с помощью которых можно создавать любые комплексные числа.

Коля вернулся домой и снова открыл книгу. Пропуская непонятный *пока* для него текст, прочитал статью о комплексных числах до конца.

Радостно было, что все увиденное им в стране Чисел подтверждалось открытиями ученых. Юный исследователь дал себе слово узнать как можно больше о комплексных числах и в будущем открыть какие-нибудь числа неизвестной природы.

Пожелаем ему удачи!