№ 1. При каких значениях параметра *a* уравнение $\cos x = 5a - 7$ **имеет не менее 5 корней на промежутке** $\left[\frac{-10\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}\right]$ **?**

Решение:

Замена $t = 5a - 7$.

Построим график зависимости $t(x) = \cos x$ в координатно-параметрической плоскости tOx .

Количество корней уравнения на промежутке $\left[\frac{-10\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}\right]$ при $t = const$ (некоторое постоянное число) – количество точек пересечения построенного графика с прямой $t = const$, находящихся на указанном промежутке.

По графику видно, что уравнение имеет 5 корней на промежутке (больше оно иметь не может) при $\cos\frac{3\pi}{4} \leqslant t \leqslant \cos\left(\frac{-10\pi}{3}\right)$.

$$\cos\frac{3\pi}{4} \leqslant 5a - 7 \leqslant \cos\left(\frac{-10\pi}{3}\right) \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant 5a - 7 \leqslant -\frac{1}{2}$$

$$\frac{14 - \sqrt{2}}{2} \leqslant 5a \leqslant \frac{13}{2}$$

Ответ: $\frac{14 - \sqrt{2}}{10} \leqslant a \leqslant \frac{13}{10}$

№ 2. Найти количество корней уравнения $(tg\,x-a+1)\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-a\right)=0$ **на интервале** $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ **в зависимости от параметра *a*.**

Решение:

$$(tg\,x-a+1)\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-a\right)=0 \iff \left[\begin{array}{l} tg\,x-a+1=0 \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-a=0 \end{array}\right.$$

В координатно-параметрической плоскости aOx построим графики функций $a(x)=tg\,x+1$ и $a(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Будем анализировать количество точек пересечения прямой $a=const$ с общим графиком на заданном интервале при каждом действительном *a*.

$$при\,a\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\{0\}\cup(1;+\infty)-1\,корень;$$

Ответ: $$при\,a\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\{1\}-2\,корня;$$

$$при\,a\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)-3\,корня.$$

№ 3. При каких значениях параметра *a* уравнение $\dfrac{a-8\sin\dfrac{\pi x}{18}}{x^2+a^2-25}=0$ **не имеет решений на промежутке** $[-11;13]$ **?**

Решение:

$$\frac{a-8\sin\dfrac{\pi x}{18}}{x^2+a^2-25}=0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a=8\sin\dfrac{\pi x}{18} \quad (1) \\ x^2+a^2\neq 25 \quad (2) \end{cases}$$

Графики зависимостей:

(1) – синусоида;
шаблонные точки: $(0;0)$, $(3;4)$, $(-3;-4)$, $(x_{max}=9;8)$, $(x_{min}=-9;-8)$

(2) – окружность с центром в точке (0;0) и радиусом 5.

Видно, что уравнение не имеет решений на заданном промежутке при $a\in(-\infty;-8)\cup(8;+\infty)$ (значения функции (1) находятся в пределах $[-8;8]$), а также в точках пересечения построенных графиков.

Ответ: $при\, a\in(-\infty;-8)\cup\{-4;4\}\cup(8;+\infty)$.

№ 4. Решить для всех действительных значений параметра *a*:

$$\frac{a^2-x^4}{\sqrt{2\left|\cos\frac{\pi x}{3}\right|-|a|}}=0$$

Решение:

$$\frac{a^2-x^4}{\sqrt{2\left|\cos\frac{\pi x}{3}\right|-|a|}}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a=\pm x^2 \\ |a|<2\left|\cos\frac{\pi x}{3}\right| \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a=\pm x^2 \\ -2\left|\cos\frac{\pi x}{3}\right|<a<2\left|\cos\frac{\pi x}{3}\right| \end{cases}$$

1) Построим график функции $a=2\left|\cos\frac{\pi x}{3}\right|$. Для этого сначала построим график $a=2\cos\frac{\pi x}{3}$, а затем обведем только те части графика, которые располагаются выше оси *Ox*.

2) Симметрично отобразив построенный график относительно оси *Ox*, получим график функции $a=-2\left|\cos\frac{\pi x}{3}\right|$.

3) Область, находящаяся между двумя этими графиками, является решением двойного неравенства. Границы области в решение не входят.

4) График уравнения в координатно-параметрической плоскости *xOa* – парабола $a=x^2$ и симмметричная ей относительно оси *Ox*.

Ответ:
$$\begin{aligned} &\textit{если}\quad a\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty),\ \textit{уравнение не имеет решений;}\\ &\textit{если}\quad a\in(-1;0),\ \textit{то}\quad x=\pm\sqrt{-a};\\ &\textit{если}\quad a=0,\ \textit{то}\quad x=0;\\ &\textit{если}\quad a\in(0;1),\ \textit{то}\quad x=\pm\sqrt{a}. \end{aligned}$$

№ 5. Решить для всех действительных значений параметра *a*:

$$\begin{cases} x=(-1)^k\cdot\sqrt{1-(a+2\mathrm{k})^2}, k\in\mathbb{Z} \\ x=-\cos\dfrac{\pi a}{2} \end{cases}.$$

Решение:

$$\begin{cases} x=(-1)^k\cdot\sqrt{1-(a+2\mathrm{k})^2},\ \ k\in\mathbb{Z}\quad (1) \\ x=-\cos\dfrac{\pi a}{2}\quad (2) \end{cases}$$

Построим графики функций *x(a)* в координатно-параметрической плоскости *xOa*.

(1): $\left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{1-(a+2l+2)^2},\ \ l\in\mathbb{Z}\quad (1.1) \\ x=\sqrt{1-(a+4m)^2},\ \ m\in\mathbb{Z}\quad (1.2) \end{array}\right.$

(1.2): $\begin{cases} x\geq 0 \\ x^2+(a+4m)^2=1 \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases}$ - верхняя полуокружность единичного радиуса с центром в точке $(a=-4m\,;x=0)$. Периодическая функция. Выражением $\{-4m\ \ |m\in\mathbb{Z}\}$ задается множество всех целых чисел, кратных 4.

(1.1): $\begin{cases} x\leq 0 \\ x^2+(a+2\mathrm{l}+2)^2=1 \\ l\in\mathbb{Z} \end{cases}$ - нижняя полуокружность единичного радиуса с центром в точке $(a=-2l-2\,;x=0)$. Периодическая функция. Выражением $\{-2l-2\ \ |l\in\mathbb{Z}\}$ задается множество всех целых четных чисел, не кратных 4.

(2) – косинусоида,
шаблонные точки: $(0\,;-1),(1\,;0),(-1\,;0),(2\,;1),(-2\,;1)$.

Система имеет решения только в общих для двух графиков точках.

Ответ: $\begin{array}{l} \textit{если}\ \ a\in\{2\mathrm{k}+1\ \ |k\in\mathbb{Z}\},\ \ \textit{то}\ x=0\,; \\ \textit{если}\ \ a\notin\{2\mathrm{k}+1\ \ |k\in\mathbb{Z}\},\ \ \textit{то}\ x\in\varnothing\,. \end{array}$

№ 6. При каких значениях параметра *a* наибольший отрицательный корень уравнения $a=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$ **меньше** $\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi a}{3}-\frac{\pi}{3}$ **?**

Решение:

$$\begin{cases} x-\text{наибольший отрицательный корень уравнения}\; a=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1 \\ x<\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi a}{3}-\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Оба этих условия можно изобразить на координатно-параметрической плоскости *xOa*.

1) Построим график функции $a=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$. Для каждого значения $a\in[-1;3]$ (координата точки графика по оси *Oa*) отметим цветом точку с наибольшей отрицательной координатой по оси *Ox*.

2) Построим в тех же координатах график функции $x=\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi a}{3}-\frac{\pi}{3}$.

Решением неравенства будет являться левая полуплоскость (граница не входит).

3) Система выполняется, если обведенная цветом часть графика $a=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$ попадает в заштрихованную область.

Ответ: $\text{при}\; a\in[-1;1)\cup[2;3]$.

№ 7. При каких значениях параметра *a* для каждого *x* из промежутка $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ верно ровно одно из трех неравенств системы:

$$\begin{cases}\cos x<1-a\\ \cos x>a-1\\ \cos x<a\end{cases}\ ?$$

Решение:

Замена: $t=\cos x$.

$$x\in\left[-\frac{\pi}{4}\right]\quad\Rightarrow\quad t\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$$

Задача сводится к следующей:

При каких значениях параметра *a* для каждого $t\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$ верно ровно одно из трех неравенств системы $\begin{cases}t<1-a\\ t>a-1\\ t<a\end{cases}$?

Изобразим решение каждого из неравенств на коодинатно-параметрической плоскости *tOx*. Заштрихуем их тремя разными цветами.

Нужный нам случай: все точки из полосы $t\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$ попадают в область, раскрашенную строго одним цветом.

Ответ: *при* $a\in\left[1-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[1+\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$.

№ 8. Пусть x_1 – наименьший положительный корень уравнения $6\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=3a$ **;**

x_2 – наибольший корень уравнения $2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=a-1$ **, меньший** π **.**

Для каждого значения параметра *a* сравнить x_1 и x_2.

Решение:

1) Построим график функции $a(x)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$. Для каждого *a* (координата точки графика по оси *Oa*) обведем цветом единственную точку графика, расположенную справа и наиболее близко от оси *Oa*. Выделенная часть графика и есть графическое изображение $x=x_1$.

2) Построим график функции $a=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1$. Для каждого *a* (координата точки графика по оси *Oa*) обведем цветом единственную точку графика, расположенную слева и наиболее близко от прямой $x=\pi$. Выделенная часть графика и есть графическое изображение $x=x_2$.

3) Для каждого *a* запишем, какая из двух кривых проходит правее (то есть какое из чисел x_1 и x_2 больше).

Ответ:
при $a\in(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$ ни одно из уравнений не имеет корней;
при $a\in(2;3]$ $\nexists x_1$;
при $a\in[-2;-1)$ $\nexists x_2$;
при $a\in[-1;0)\cup[1;2]$ $x_1>x_2$;
при $a=0$ $x_1=x_2$;
при $a\in(0;1)$ $x_1<x_2$.

№ 9. Решить для всех действительных значений параметра *a*:

$$\frac{\left(x-4\sin\frac{\pi a}{12}\right)\cdot\left(a+4\sin\frac{\pi x}{12}\right)}{\sqrt{(|x|-1)^2+(|a|-1)^2-2}\cdot\sqrt{10-(|x|-3)^2-(|a|-3)^2}}=0$$

Решение:

Уравнение равносильно системе: $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=4\sin\frac{\pi a}{12}\quad(1)\\ a=-4\sin\frac{\pi x}{12}\quad(2)\end{array}\right.\\ (|x|-1)^2+(|a|-1)^2>2\quad(3)\\ (|x|-3)^2+(|a|-3)^2<10\quad(4)\end{cases}$.

(1) – синусоида *x(a)*;
шаблонные точки:
$(a;x),\ (0;0),\ (2;2),\ (-2;-2),\ (a_{max}=6;4),\ (a_{min}=-6;-4)$.

(2) – синусоида *a(x)*;
шаблонные точки:
$(x;a),\ (0;0),\ (2;-2),\ (-2;2),\ (x_{max}=-6;4),\ (x_{min}=6;-4)$.

(3):
Построим границу $(|x|-1)^2+(|a|-1)^2=2$.
График уравнения симметричен относительно оси *Ox* и относительно оси *Oa*.
I четверть $(a\geq 0;x\geq 0)$:
$(x-1)^2+(a-1)^2=2$ - окружность радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке (1; 1).

Подстановкой точек из двух получившихся областей получаем, что решение неравенства – внешняя по отношению к границе область (граница не входит).

(4):
Построим границу $(|x|-3)^2+(|a|-3)^2=10$.
График уравнения симметричен относительно оси *Ox* и относительно оси *Oa*.
I четверть $(a\geq 0;x\geq 0)$:
$(x-3)^2+(a-3)^2=10$ - окружность радиуса $\sqrt{10}$ с центром в точке (3; 3).

Подстановкой точек из двух получившихся областей получаем, что решение неравенства – внутренняя по отношению к границе область (граница не входит).

Заштрихуем пересечение решений неравенств (3) и (4).

Для тех *a*, при которых существует решение хотя бы одного из уравнений, попадающее в заштрихованную область, выразим *x* через *a*.

Ответ:

при $a\in(-6;-4]\cup[4;6)$ $x\in\left\{4\sin\frac{\pi a}{12}\right\}$;

при $a\in(-4;-2)\cup(2;4)$ $x\in\left\{4\sin\frac{\pi a}{12};-\frac{12}{\pi}\arcsin\frac{a}{4}\right\}$;

при $a\in(-\infty;-6]\cup[-2;2]\cup[6;+\infty)$ $x\in\varnothing$.

№ 10. Решить для всех действительных значений параметра *a*:

$$\sqrt{6|a|-x}\cdot\left(x+2\cos\frac{\pi}{6a}-4\right)\geq 0\ .$$

Решение:

$$\sqrt{6|a|-x}\cdot\left(x+2\cos\frac{\pi}{6a}-4\right)\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=6|a| \\ \begin{cases} x<6|a| \\ x\geq 4-2\cos\dfrac{\pi}{6a} \end{cases} \end{array}\right.$$

Замена: $t=\dfrac{1}{a}\neq 0$.

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{6}{|t|} \quad (1) \\ \begin{cases} x<\dfrac{6}{|t|} \quad (2) \\ x\geq 4-2\cos\dfrac{\pi t}{6} \quad (3) \end{cases} \end{array}\right.$$

Построим графики полученных зависимостей в координатно-параметрической плоскости *xOt*.

(1):
График функции симметричен относительно оси *Ox*.

$t\geq 0$: $\quad x=\dfrac{6}{t}$.

Точки графика являются решением без всяких дополнительных условий.

(2) – область под построенным графиком.

(3):
Граница $x(t)=4-2\cos\dfrac{\pi t}{6}$. Решение неравенства – область над графиком (граница входит).

Решение совокупности – пересечение полученных областей (2), (3) и граница неравенства (2).

при $t\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$ $x=\dfrac{6}{|t|}$;

при $t\in(-2;0)\cup(0;2)$ $x\in\left[4-2\cos\dfrac{\pi t}{6};\dfrac{6}{|t|}\right]$.

Ответ:

при $a\in\left[-\dfrac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$ $x=6|a|$;

при $a\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ $x\in\left[4-2\cos\dfrac{\pi}{6a};6|a|\right]$.

№ 11. Найти количество корней уравнения $\left(2|x|-3a\right)\left(\sin\frac{\pi x}{3}-a+2\right)=0$ **на интервале [-3; 3] в зависимости от параметра *a*.**

Решение:

$$\left(2|x|-3a\right)\left(\sin\frac{\pi x}{3}-a+2\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} a=\frac{2}{3}|x| & (1) \\ a=\sin\frac{\pi x}{3}+2 & (2) \end{array}\right.$$

1) Построим графики функций в координатно-параметрической плоскости *aOx*.

2) Количество корней уравнения на промежутке [-3; 3] при $a=const$ (некоторое постоянное число) – количество точек пересечения построенного графика с прямой $a=const$, находящихся на указанном промежутке.

При $a\in(-\infty;0)$ 0 корней;
при $a=0$ 1 корень;
при $a\in(0;1]$ 2 корня;
при $a\in(1;2)$ 4 корня;
при $a=2$ 3 корня;
при $a\in(2;3)$ 2 корня;
при $a=3$ 1 корень;
при $a\in(3;+\infty)$ 0 корней.

Ответ:
при $a\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$ 0 корней;
при $a\in\{0;3\}$ 1 корень;
при $a\in(0;1]\cup(2;3)$ 2 корня;
при $a=2$ 3 корня;
при $a\in(1;2)$ 4 корня.

№ 12. Решить для всех действительных значений параметра *a*:

$$\frac{a-x|x|}{\frac{4}{\pi}arctg\,x-a}=0\ .$$

Решение:

$$\frac{a-x|x|}{\frac{4}{\pi}arctg\,x-a}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=x|x| & (1) \\ a\neq\frac{4}{\pi}arctg\,x & (2) \end{cases}$$

(1):

при $x\geq 0 \quad a=x^2$;

при $x<0 \quad a=-x^2$.

(2):

$$a(0)=0$$

$$a(1)=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}=1$$

$$a(-1)=\frac{4}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$$

Асимптоты: $a=\frac{4}{\pi}\cdot\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=\pm 2$.

Решение системы – график (1), если он не пересекается с графиком (2).

Ответ:

при $a\in\{-1;0;1\}$ нет корней;

при $a\in(-\infty;-1)\cup(-1;0) \quad x=-\sqrt{-a}$;

при $a\in(0;1)\cup(1;+\infty) \quad x=\sqrt{a}$.

№ 13. Найти количество корней уравнения $\left(a-\frac{\pi}{2}-\sin\left(\arcsin x\right)\right)\cdot\left(arcctg\, x-a\right)=0$ **в зависимости от параметра *a*.**

Решение:

$$\left(a-\frac{\pi}{2}-\sin\left(\arcsin x\right)\right)\cdot\left(arcctg\, x-a\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{ll} a=\sin\left(\arcsin x\right)+\frac{\pi}{2} & (1)\\ a=arcctg\, x & (2)\end{array}\right.\\ x\in[-1;1]\end{cases}$$

(1): $a=\sin\left(\arcsin x\right)\ \uparrow\frac{\pi}{2}$

$$a=\sin\left(\arcsin x\right) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x\in[-1;1]\\ a=x\end{cases}$$

Количество корней уравнения на промежутке [-1; 1] при $a=const$ (некоторое постоянное число) – количество точек пересечения построенного графика с прямой $a=const$, находящихся на указанном промежутке.

Ответ:

при $a\in\left(-\infty;\frac{\pi}{2}-1\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+1;+\infty\right)$ 0 корней;

при $a\in\left[\frac{\pi}{2}-1;\frac{\pi}{4}\right)\cup\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\cup\left(\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{2}+1\right]$ 1 корень;

при $a\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$ 2 корня.

№ 14. При каких значениях параметра *a* уравнение

$$\frac{x-\arccos(\cos a)}{x-\frac{\pi}{3}\cos\left(a-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{3}}=0$$ **не имеет решений?**

Решение:

$$\frac{x-\arccos(\cos a)}{x-\frac{\pi}{3}\cos\left(a-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{3}}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=\arccos(\cos a) & (1) \\ x\neq\frac{\pi}{3}\cos\left(a-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3} & (2) \end{cases}$$

(1):

$$x=f(a)=\arccos(\cos a)$$
$$D(f)=\mathbb{R}; \quad T=2\pi$$

Построим график функции x=f(a) на промежутке $[-\pi;\pi]$, а остальную часть графика достроим, пользуясь переодичностью.

При $a\in[0;\pi]$ $\quad x=\arccos(\cos a)=a$;

при $a\in[-\pi;0)$ $\quad -a\in(0;\pi]$ $\quad x=\arccos(\cos a)=\arccos(\cos(-a))=-a$.

(2):

$$x=\frac{\pi}{3}\cos a \quad \rightarrow\frac{\pi}{6} \quad \uparrow\frac{\pi}{3}$$

Равносильная исходному уравнению система не имеет решений, когда графики двух уравнений пересекаются.

Ответ: при $a\in\left\{-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi n \mid k,n\subset\mathbb{Z}\right\}$.