Для тех, кто хочет знать больше

«Различные способы доказательства теоремы Пифагора: выбери лучшее»

Составитель Некрасова Алина,

ученица 8б класса

МОБУ «СОШ №90»

р.п. Чунский Иркутской области

2014год

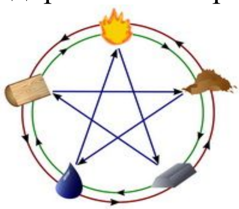
Введение

Пифагор Самосский (ок.580 – 500 гг. до н.э.) - древнегреческий философ и математик, религиозный и политический деятель, основатель школы пифагорейцев.

Он родился в Древней Греции на острове Самос, который находится в Эгейском море у берегов Малой Азии, поэтому его называют Пифагором Самосским.

Много путешествовал, жил в Египте, Вавилоне, постигая науку египетских жрецов и восточных ученых-математиков. Вавилоняне изобрели и применяли при счете позиционную систему счисления, умели решать линейные, квадратные и некоторые виды кубических уравнений. Математика стала важнейшей частью учения Пифагора.

Вернувшись на родину, он и его последователи-пифагорейцы - организовали тайный союз, в котором узнавали друг друга по звёздчатому пятиугольнику - пентаграмме, что означает символ здоровья и совершенства.



В пентаграмме Пифагор вычислил золотое сечение, поэтому считал ее геометрическим воплощением математического совершенства. Землю считал шаром, движущимся вокруг Солнца, а мир состоит из пяти элементов: огонь, земля, вода, воздух, эфир.

Пифагору приписывается изучение свойств целых чисел и пропорций. «Все есть число» - числа наделяли пифагорейцы свойствами: например, 5 символизирует цвет, 6 – холод, 7 – разум, здоровье и свет, 8- любовь и дружбу.

Пифагорейцами было сделано много важных открытий в арифметике и геометрии, в том числе:

- выведена теорема о сумме внутренних углов треугольника;
- предложены геометрические способы решения квадратных уравнений;
- изучено деление чисел на четные и нечетные, простые и составные числа;
- введено понятие фигурных, совершенных и дружественных чисел;
- создана математическая теория музыки и учение об арифметических, геометрических и гармонических пропорциях и многое другое.
- Известно также, что, кроме духовного и нравственного развития учеников, Пифагора заботило их физическое развитие. Он не только сам участвовал в Олимпийских играх и два раза побеждал в кулачных боях, но и воспитал плеяду великих олимпийцев.

  С именем Пифагора связывают теорему о сторонах прямоугольного треугольника (хотя она была известна египтянам и китайским ученым задолго до Пифагора) потому, что он, по-видимому, впервые доказал ее.

Эта теорема является одним из самых гениальных человеческих открытий и одним из самых используемых геометрических утверждений.
Так, возможно, звучала теорема во времена Пифагора:

Площадь квадрата построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах.
Или:
Если стороны прямоугольного треугольника измерены одной и той же единицей, то квадрат числа, выражающего гипотенузу, равен сумме квадратов чисел, выражающих катеты.
А так звучит современная формулировка:
В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.
И даже в стихах:

Если дан нам треугольник
И притом с прямым углом,
То квадрат гипотенузы
Мы всегда легко найдем:
Катеты в квадрат возводим,
Сумму степеней находим -
И таким простым путём
К результату мы придём.

У этой теоремы много способов доказательства (от 100 до 500 по разным источникам).
Рассмотрим те доказательства теоремы Пифагора, которые приведены в современных учебниках геометрии и учебниках прошлых лет разных авторов.
Предлагаю Вам, друзья, познакомиться с ними и поразмышлять над вопросом, какое доказательство для Вас самое интересное, трудное или занимательное.

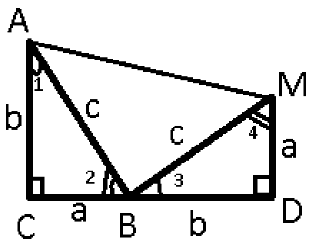
Рассматривая теорему в учебниках прошлых лет, можно познакомиться с тем, как доказывали теорему Пифагора наши мамы и папы.

Примеры доказательств теоремы Пифагора в учебниках разных авторов

1. Геометрическо - алгебраическое доказательство

а) Руденко В.Н., Бахурин Г.А. Геометрия: Проб. учебник для 7-9 кл. сред. шк./ Под ред. А. Я. Цукаря – М.: Просвещение, 1992.

Теорема: *В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*



Дано: $\triangle ABC$ - прямоугольный, $\angle C=90^\circ$.
Доказать: $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Доказательство:

1) Доп. построение: $BD = AC$, $MD \perp CD$, равный отрезку а, соединим точки А и М.

2) По свойству площадей:

$S\triangle\ AMDC = S\triangle ABC + S\triangle ABM + S\triangle BMD$;

$S\triangle\ AMDC = \frac{1}{2} \cdot ab + \frac{1}{2} \cdot c^2 + \frac{1}{2} \cdot ab = \frac{1}{2}(2ab + c^2)$.

3) AMDC – трапеция ($AC \parallel DM$) $\Rightarrow S_{трап} = \frac{1}{2}(a + b)\cdot(a + b)$.

4) Приравняем найденные выражения:

$\frac{1}{2}(2ab + c^2) = \frac{1}{2}(a + b)\cdot(a + b)$

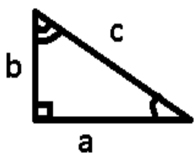
$2ab + c^2 = (a + b)^2$

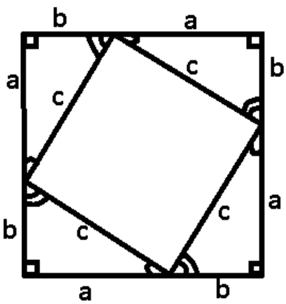
$2ab + c^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$c^2 = a^2 + b^2$ или $AB^2 = AC^2 + BC^2$, что и требовалось доказать.

<u>Примечание 1:</u> Это доказательство аналогично доказательству Гарфилда.

б) Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян и др. 21-е изд. – М.: Просвещение, 2011.
Теорема: *В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*





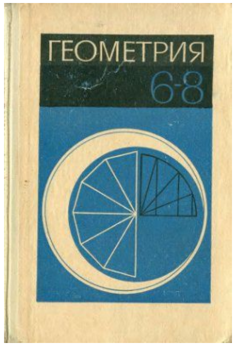
Дано: прямоугольный треугольник
Доказать: $c^2 = a^2 + b^2$
Доказательство:
1) Дополнительное построение: достроим треугольник до квадрата со стороной $a + b$.
2) $S_{\text{квад}} = (a + b)^2$.
3) $S_{\text{квад}} = 4 \cdot \frac{1}{2}\cdot ab + c^2 = 2ab + c^2$.

4) Следовательно, $(a + b)^2 = 2ab + c^2$, тогда
$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$ или $c^2 = a^2 + b^2$, что и требовалось доказать.

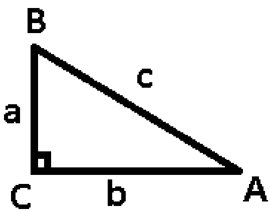
Примечание 2: В доказательствах а) и б) использовались понятие и свойства площади, формулы площади прямоугольного треугольника и трапеции (геометрия); формула квадрата двучлена и алгебраические преобразования (алгебра), отсюда и название способа доказательства.

2. Геометрический способ, основанный на понятии площади

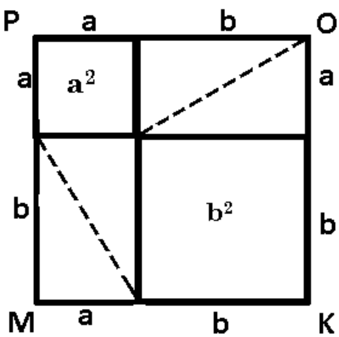
а) Никитин Н.Н. Геометрия: учеб. для 6 – 8 кл. – 16-е изд. – М.: Просвещение, 1971.

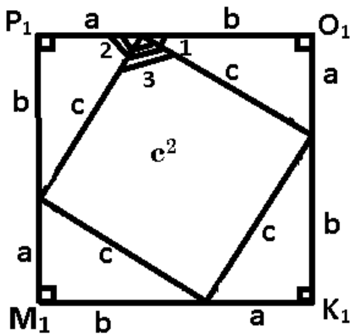


Теорема*: Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.*



Дано: ΔABC, $\angle C=90^\circ$.
Доказать: $c^2 = a^2 + b^2$





Доказательство:

1) Построим на сторонах треугольника квадраты. Площади этих квадратов равны a^2 , b^2 и c^2.

2) Построим два квадрата МКОР и $M_1K_1O_1P_1$.

3) Квадрат МКОР разбился на два квадрата с площадями a^2 и b^2 и четыре равных прямоугольных треугольника, каждый из которых равен ΔABC.

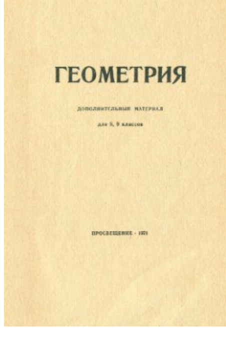
4) Квадрат $M_1K_1O_1P_1$ разбился на квадрат с площадью c^2 и четыре прямоугольных треугольника, каждый из которых равен ΔABC.

5) Сумма площадей квадратов, построенных на катетах, равна площади квадрата МКОР без суммы площадей четырёх равных треугольников, а площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна площади квадрата $M_1K_1O_1P_1$, равного квадрату МКОР, без суммы площадей четырёх таких же треугольников.

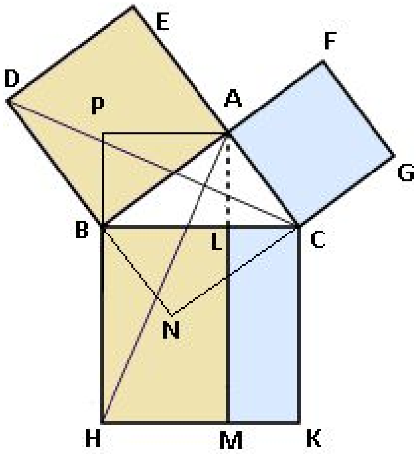
Следовательно, площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

Получаем формулу $c^2 = a^2+b^2$.

б) Киселев А.П., Рыбкин Н.А. Геометрия: доп. материал для 8,9 кл. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 1971.



Теорема: *Сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе.*



Дано: ΔABC, $\angle A=90^\circ$, BDEA, AFGC и BCKH-квадраты, построенные на его катетах и гипотенузе.

Доказать: $S_{кв.}$ BDEA + $S_{кв.}$ AFGC = $S_{кв.}$ BCKH.

Доказательство:

1) Доп. построение: AM $\perp$ BC $\Rightarrow$ BCKH= BLMH+LCKM.
 Докажем, что прямоугольник BLMH равновелик квадрату BDEA, а прямоугольник LCKM равновелик квадрату AFGC.

2) Проведем прямые DC и AH.

3)ΔDCB с основанием BD, общим со стороной квадрата BDEA и высотой CN, равной стороне AB этого квадрата, равновелик половине его.

4)ΔABH с основанием BH, общим с большей стороной прямоугольника BLMH, и высотой AP, равной меньшей стороне этого прямоугольника, равновелик половине его.

5) ΔABH= ΔDCB по двум сторонам и углу между ними (BD=BA и BC=BH как стороны одного квадрата, $\angle$DBC=$\angle$ABH, так как каждый из этих углов состоит из общей части ABC и прямого угла) $\Rightarrow$ BLMH равновелик BDEA.

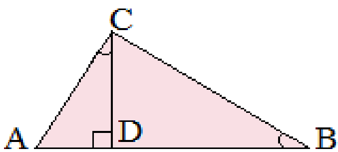
6) Соединив G с B и A с K, так же докажем, что прямоугольник LCKM равновелик квадрату AFGC ⇒ квадрат BCKH равновелик сумме квадратов BDEA и AFGC .

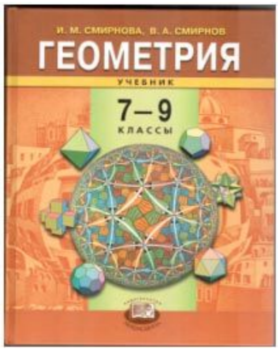
Примечание 3: Автор пособия называет этот способ по имени Евклида и приводит еще один способ, в котором квадраты, построенные на катетах, разбиваются на части, из которых перемещением (поворот на 90º) образован квадрат, построенный на гипотенузе.

3. Доказательство, основанное на подобии треугольников

Смирнова И.М., Смирнов В.А.Геометрия 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений.- 2-е изд., испр.–М.: Мнемозина, 2007.

Теорема: *В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*





Δ ABC ~Δ ACD и Δ ABC ~ Δ CBD (по первому признаку),

следовательно, $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$ или $AC^2 = AB \cdot AD$.

Аналогично, $\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$ или $BC^2 = AB \cdot BD$. Складываем,

Получаем $AC^2 + BC^2 = AB\,(AD + BD) = AB^2$.
$AC^2 + BC^2 = AB^2$.

Примечание 4. В учебнике Смирновых И.М. и В.А. приводится и второе доказательство теоремы Пифагора, основанное на понятии площади и методе разрезания. Привожу его, позаимствовав рисунки прямо из учебника.
Теорема: *Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.*

Доказательство:

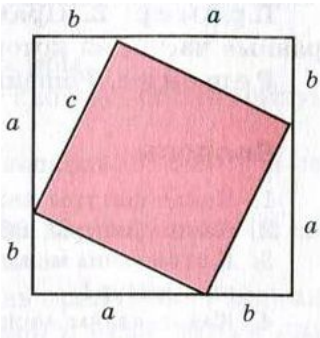


Рис. 65.6

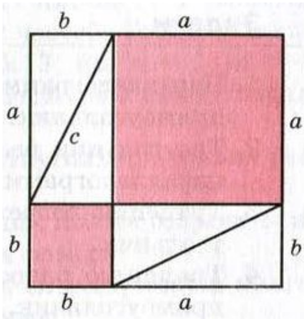
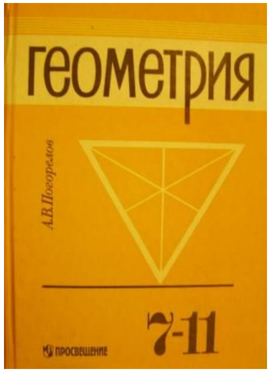


Рис. 65.7

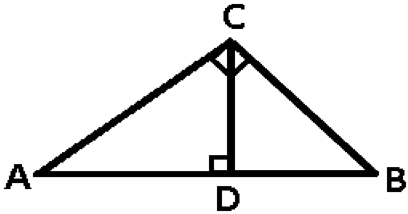
Пусть дан прямоугольный треугольник ABC с катетами a, b и гипотенузой c. Доказательство следует из рассмотрения двух равных квадратов со стороной, равной сумме катетов данного прямоугольного треугольника, в которых проведены отрезки, как показано на рисунках 65.6 и 65.7. В первом случае квадрат разобьется на квадрат, построенный на гипотенузе данного треугольника, и четыре треугольника, равных данному. Во втором случае квадрат разобьется на два квадрата, построенных на катетах данного треугольника, равных данному. Таким образом, $c^2 = a^2 + b^2$.

4. Доказательство, основанное на тригонометрических функциях

Погорелов А.В. Геометрия: Учеб. для 7 – 11 кл. сред. шк. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 1992.



Теорема: *В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*



Дано: ΔABC, $\angle C = 90^\circ$.
Доказать: $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Доказательство:

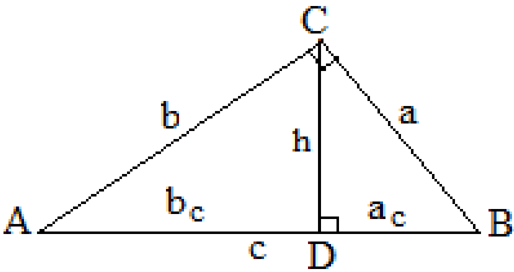
1) Доп. построение: высота CD из вершины прямого угла C.
2) По определению косинуса:
   из Δ ADC: $\cos A = AD/AC$;
   из Δ ABC: $\cos A = AC/AB$.
   Тогда $AD/AC = AC/AB$ и $AC^2 = AB \cdot AD$.
3) Аналогично, $\cos B = BD/BC = BC/AB \Rightarrow BC^2 = AB \cdot BD$.
4) Сложим почленно полученные равенства:

$AC^2 + BC^2 = AB(AD + BD) = AB^2$, что и требовалось доказать.

5. Доказательство, основанное на соотношениях отрезков в прямоугольном треугольнике

а) Геометрия: учебное пособие для 7 кл. сред. шк./ Под ред. А. Н. Колмогорова – М.: Просвещение, 1977.

Теорема: *Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов*.



Дано: Δ ABC, ∠ A = 90˚.
Доказать: $c^2 = a^2 + b^2$.

Доказательство:

1) Дополнительное построение: высота AD.
2) По теореме о соотношениях в прямоугольном треугольнике, катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу:

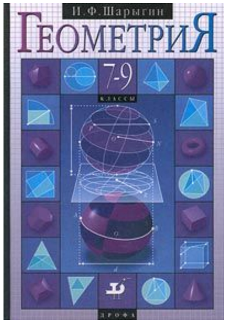
$b^2 = b_c \cdot c$ и $a^2 = a_c \cdot c$.

3) Сложим почленно эти равенства:

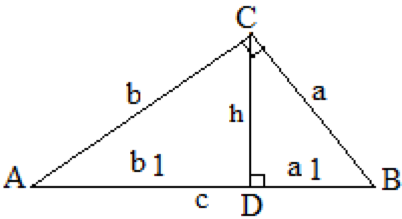
$a^2 + b^2 = a_c \cdot c + b_c \cdot c = c \cdot (a_c + b_c) = c \cdot c = c^2$.

Итак, $c^2 = a^2 + b^2$.

б) Шарыгин И.Ф. Геометрия.7 – 9 кл.: Учеб. для общеобразоват. учеб. завед. – 5-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2001.



Теорема: *В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*



Дано: Δ ABC, $\angle$ C = 90°.
Доказать: $c^2 = a^2 + b^2$.

Доказательство:
1) Дополнительное построение: высота CD.
2) По теореме о соотношениях в прямоугольном треугольнике $b^2 = b_1 \cdot c$ и $a^2 = a_1 \cdot c$.
3) Сложим почленно эти равенства:
$a^2 + b^2 = a_1c + b_1c = c(a_1 + b_1) = c \cdot c = c^2$.
Итак, $c^2 = a^2 + b^2$.

Примечание 5: Доказательство, основанное на соотношениях отрезков в прямоугольном треугольнике, приводит и Атанасян Л.С., только в виде задачи, аналогичное доказательствам, приведенным в учебниках Шарыгина И.Ф., и у Колмогорова А.Н.

Заключение

Таким образом, из рассмотренных учебников мы познакомились со следующими способами доказательств:

- способ, основанный на понятии площади;
- способ, основанный на соотношениях в прямоугольном треугольнике (или подобии);
- способ, основанный на тригонометрических функциях.

Возможно, каким - то из этих способов доказывал свою теорему и Пифагор или кто-нибудь из его учеников. Древнеегипетские землемеры ежегодно после разлива Нила межевали земельные участки, используя теорему, обратную теореме Пифагора, зная, что треугольник со сторонами 3, 4, 5 – прямоугольный. Возможно, поэтому он называется египетским. Тройки чисел, удовлетворяющие данному уравнению, называются пифагоровыми тройками чисел.

Обратная теорема:
Если натуральные числа x, y и z таковы, что $x^2 + y^2 = z^2$, то треугольник со сторонами x, y и z – прямоугольный.

Примеры пифагоровых троек чисел:

		2	3	4	5	6
1		3,4,5	6,8,10	8,15,17	10,24,26	12,35,37
2			5,12,13	16,12,20	20,21,29	24,32,40
3				7,24,25	16,30,34	27,36,45

Желаю, Вам друзья, успехов в дальнейшем изучении геометрии!

Список используемой литературы:

1. Энциклопедический словарь юного математика/Сост. А.П.Савин. - М.: Педагогика, 1985.
2. Виленкин Н.Я. И За страницами учебника математики: Арифметика. Алгебра. Геометрия: Кн. для учащихся 10-11 кл. общеобразоват. учреждений.-М.: Просвещение, 1996.
3. Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян и др. 21-е изд. – М.: Просвещение, 2011.
4. Смирнова И.М., Смирнов В.А.Геометрия 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений. - 2-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2007.
5. Киселев А. П. Геометрия: доп. материал для 8,9 кл. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 1971.
6. Геометрия: учебное пособие для 7 кл. сред. шк./ Под ред. А. Н. Колмогорова – М.: Просвещение, 1977.
7. Никитин Н.Н. Геометрия: учеб. для 6 – 8 кл. – 16-е изд. – М.: Просвещение, 1971.
8. Погорелов А.В.   Геометрия: Учеб. для 7 – 11 кл. сред. шк.–3-е изд. – М.: Просвещение, 1992.
9. Руденко В.Н., Бахурин Г.А.   Геометрия: Проб. учебник для 7-9 кл. сред. шк./ Под ред. А. Я. Цукаря – М.: Просвещение, 1992.
10. Шарыгин И. Ф.   Геометрия. 7 – 9 кл.: Учеб. для общеобразоват. учеб. завед. – 5-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2001.