

Доклад на тему: "Геометрия Н. И. Лобачевского"



7,5" КЛАССА

Гимназии №35

ГОРОДА РОСТОВА-НА-ДОНУ

Выполнили: Амбарцумян София, Симонова Марианна,

Богачева Полина, Ращупкина Софья,

Прокопова Ирина, Горбачева Алина.

2015 г.

Содержание

1. Чем интересна выбранная тема?
2. Биография Николая Ивановича Лобачевского.
3. Геометрия Лобачевского.
4. Псевдосфера Лобачевского.
5. Доказательства теорем.
6. Чем интересна геометрия Лобачевского в современном мире?
7. Заключение.
8. Справочная литература.

Чем интересна выбранная тема?

Все мы в школе проходим курс геометрии — науки, в которой кто-то не видит смысла, а иные находят свое призвание. При этом мы изучаем Евклидову геометрию, зародившуюся более двух тысяч лет назад, но и сейчас остающуюся актуальной. Но почти все слышали и о других, так называемых неевклидовых геометриях, в частности — о геометрии Лобачевского. И самое странное, что знакомство с этой наукой заканчивалось на утверждении, что она допускает возможность пересечения параллельных прямых. Этот факт удивляет, даже поражает, но, как и все непонятное, воспринимается на веру.

А ведь на самом деле геометрия Лобачевского не так уж сильно отличается от привычной нам геометрии и параллельные прямые в ней не пересекаются — это досужий миф, родившийся при странных обстоятельствах.

Необходимо сделать лишь одно очень важное уточнение: геометрия Лобачевского описывает не плоское пространство, как это делает геометрия Евклида, а оперирует понятиями гиперболического пространства. В геометрии Лобачевского пространство не плоско, оно имеет некоторую отрицательную кривизну. Представить это достаточно сложно, но хорошей моделью такого пространства являются геометрические тела, похожие на воронку и седло. Так что необходимо избавиться от превратных понятий о геометрии Лобачевского и понять, что она может применяться только по отношению к миру с искривленным пространством. Однако космология в последние годы приходит к выводу, что пространство, в котором мы живем, может обладать отрицательной кривизной, наилучшим образом описываемой именно геометрией Лобачевского.

Николай Иванович Лобачевский 1792 - 1856



Николай Иванович Лобачевский родился 1 декабря (20 ноября) 1792 года в Нижнем Новгороде в бедной семье мелкого чиновника.

Девятилетним мальчиком он был привезен матерью в Казань и ее стараниями устроен вместе с двумя братьями в гимназию на казенное содержание. С этого времени его жизнь и работа протекают в Казани.

В гимназии, как мы знаем по "Воспоминаниям" С.Т.Аксакова, увлекательно преподавал математику талантливый учитель Г.И.Карташевский, воспитанник Московского университета. Он поставил изучение математики на значительную высоту. И когда юный 14-летний Лобачевский становится в феврале 1807 года студентом университета (тоже казеннокоштным), он уже вскоре проявляет особенную склонность к изучению физико-математических наук, обнаруживая выдающиеся способности. В этот, несомненно, сказались результаты педагогической деятельности Г.И.Карташевского.

Однако в университете Лобачевскому уже не удалось слушать лекции Карташевского, так как последний в декабре 1806 г. был отстранен от должности директором И.Ф.Яковкиным, как "проявивший дух неповиновения и несогласия". Математические курсы в университете стал вести М.Ф.Бартельс, прибывший в Казань в 1808 году.

Успехи студента Н.И.Лобачевского, соревнующегося в своих занятиях с И.П.Симоновым, впоследствии известным астрономом и участником кругосветного плавания, неизменно вызывали одобрение М.Ф.Бартельса и других профессоров.

3 августа 1811 г. Лобачевский утверждается магистром. Его руководитель профессор М.Ф.Бартельс был квалифицированным математиком и опытным преподавателем, но не вел творческой работы. Лобачевский изучил под его руководством классические труды по математике и механике: "Теорию чисел" (Disquisitiones Arithmeticae) Гаусса и первые томы "Небесной механики" Лапласа. Представив два научных исследования по механике и по алгебре ("Теория эллиптического движения небесных тел" (1812 г.) и "О разрешимости алгебраического уравнения $x^n - 1 = 0$ " (1813 г.), он был ранее срока в 1814 г. произведен в адъюнкт-профессоры (доценты).

Со следующего года он ведет самостоятельное преподавание, постепенно расширяя круг читаемых им курсов и уже задумываясь над перестройкой начал математики. Еще через год он получает звание экстраординарного профессора.

Но вскоре в университете создается очень тяжелая обстановка для работы. В целях борьбы с революционными настроениями и "вольнодумством" правительство Александра I, проводя все более реакционную политику, ищет идеологической опоры в религии, в мистико-христианских учениях. Университеты в первую очередь подвергаются проверке.

Для обследования Казанского университета был назначен и прибыл в марте 1819 г. член Главного правления училищ М.Л.Магницкий, который использовал свое назначение в карьеристских целях. В своем отчете он приходит к выводу, что университет "причиняет общественный вред полуученностью образуемых им воспитанников ...", а поэтому "подлежит уничтожению в виде публичного его разрушения" ради назидательного примера для других правительств.

Однако университет не был уничтожен. Александр I решил его исправить. Попечителем Казанского учебного округа был назначен Магницкий, который и приступил к энергичному "обновлению университета". Он начал свою деятельность увольнением девяти профессоров. Была установлена тщательная слежка за содержанием лекций и студенческих записок и введен суровый казарменный режим для студентов.

Семь лет этой церковно-полицейской системы принесли Лобачевскому тяжелые испытания, но не сломили его непокорный дух. Выдержать этот гнет ему помогла только его обширная и многообразная педагогическая, административная и исследовательская деятельность. Он преподает математику на всех курсах вместо уехавшего в Дерпт (Тарту) Бартельса; замещает профессора К.Броннера, не вернувшегося после отпуска в Казань; читает физические курсы и заведует физическим кабинетом; замещает отправившегося в кругосветное плавание астронома И.П.Симонова; читает астрономию и геодезию, приняв в свое ведение обсерваторию. Ряд лет он работает деканом физико-математического отделения. Колоссальный труд вкладывает он в упорядочивание библиотеки и в расширение ее физико-математической части. Он является вместе с тем одним из активнейших членов, а затем и председателем строительного комитета, занятого постройкой главного университетского корпуса. Наконец, несмотря на тысячи текущих дел и обязанностей, Лобачевский не прекращает напряженной творческой деятельности. Он пишет два учебника для гимназий: "Геометрию" (1823 г.) и "Алгебру" (1825 г.). "Геометрия" получает отрицательный отзыв у академика Н.И.Фусса, не оценившего тех изменений, который Лобачевский внес в традиционное изложение, и осудившего введение метрической системы мер, поскольку она создана в революционной Франции. "Алгебра" из-за внутренних проволочек в университете тоже не была напечатана.

Вскоре начинаются столкновения с попечителем. Лобачевский, по словам Магницкого, проявляет дерзость, нарушение инструкций. Магницкий решает установить особенный надзор за его поступками.

Однако и в этих унижающих достоинство человека условиях мысль Лобачевского работает неустанно над строгим построением начал геометрии. Первые следы этой работы мы находим в студенческих записках его лекций по геометрии за 1817 г. Об ней же свидетельствует рукопись учебника "Геометрия" и его "Обозрения преподавания чистой математики" за 1822 - 1823 и 1824 - 1825 гг. Наконец, его искания завершаются гениальным открытием. Разрывая оковы тысячелетних традиций, Лобачевский приходит к созданию новой геометрии. 23 (11) февраля 1826 г. он делает на факультете доклад о новой "Воображаемой геометрии". Этот доклад "Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных" был передан на отзыв профессорам И.М.Симонову, А.Я.Купферу и адъюнкту Н.Д.Брашману. Лобачевский хотел знать мнение своих

сотрудников об открытии, величие которого он сознавал, и просил принять своё сочинение в предполагаемое издание "Уч ных Записок" отделения.

Но отзыва не последовало. Рукопись доклада до нас не дошла. Материал этого доклада был включен Лобачевским в его первое сочинение "О началах геометрии", вышедшее в 1829 - 1830 гг. в "Казанском вестнике".

Открытие Лобачевского было сделано им на путях принципиального критического пересмотра самых первых, начальных, геометрических понятий, принятых в геометрии еще со времен Евклида (3 век до н.э.). Это требование безусловной строгости и ясности в началах, это пристальное внимание к вопросам основ науки и углубленный анализ первоначальных понятий характерны вообще для творчества Лобачевского. Избранное им направление исследований способствовало тому, что он не только в геометрии, но и в ряде других областей математики превосходит достигнутый в то время уровень науки: так, им дано уточнение понятия функции, приписанное впоследствии Дирихле; он четко разграничивает непрерывность функции и ее дифференцируемость; им проведены глубокие исследования по тригонометрическим рядам, опередившие его эпоху на много десятилетий; им разработан метод численного решения уравнений, несправедливо получивший впоследствии название метода Грешфе, тогда как Лобачевский и независимо от него бельгийский математик Данделен разработали этот метод значительно раньше.

Доклад Н.И.Лобачевского совпал по времени с падением Магницкого. Специальная ревизия выявила ряд злоупотреблений, и мракобес попечитель был смещен и выслан.

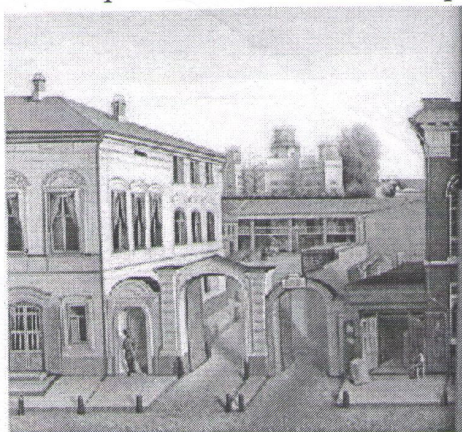
Новый попечитель Казанского учебного округа М.Н.Мусин-Пушкин сумел оценить кипучую деятельную натуру Н.И.Лобачевского. Великого геометра избирают вскоре, в 1827 г., ректором и 19 лет он самоотверженно трудится на этом посту, добиваясь расцвета Казанского университета.



Лобачевский стремился претворить в жизнь свою широкую передовую программу университетского образования, представление о которой дает его речь "О важнейших предметах воспитания", произнесенная им через год после назначения ректором.

Лобачевский добивается существенного повышения уровня научно-учебной работы на всех факультетах. Он проводит строительство целого комплекса университетских вспомогательных зданий: библиотеки, астрономической и магнитной обсерватории, анатомического театра, физического кабинета и химической лаборатории. Он пытается создать при университете "Общество наук", но не по-

лучает на это разрешения. Журнал смешанного содержания "Казанский вестник" он заменяет организованным им строгим научным журналом "Учеными записками Казанского университета", первая книжка которого выходит в 1834 г. и открывается предисловием Лобачевского, освещающим цели научного издания. В течение 8 лет он продолжает одновременно с ректорством управлять библиотекой. Он сам читает ряд специальных курсов для студентов. Он пишет наставление учителям математики и заботится о постановке преподавания также в училищах и гимназиях. Он принимает участие в поездке в Пензу в 1842 г. для наблюдения солнечного затмения. Умело оберегает он сотрудников и студентов университета во время эпидемии холеры в 1830 г., изолировав университетскую территорию и проводя тщательную дезинфекцию. Он организовал спасение астрономических инструментов и выноску книг из загоревшейся библиотеки во время громадного пожара Казани в 1842 г., причем ему удается отстоять от огня почти все университетские здания. Наконец, он организует чтение научно-популярных лекций для населения и открывает свободный доступ в библиотеку и музеи университета.



И вместе с тем он находит время для непрерывных и обширных научных исследований, посвященных, главным образом, развитию новой геометрии. Его идеи были настолько непривычны, глубоки и новы, он настолько обогнал свою эпоху, что современники не смогли понять его и правильно оценить. Его первая работа "О началах геометрии"

(1829 - 1830 гг.) была представлена Советом университета в 1832 г. в Академию наук. Но даже академик М.В.Остроградский не понял ее значения и дал на нее отрицательный отзыв: "...Книга г-на ректора Лобачевского опорочена ошибкой ..., она небрежно изложена и ..., следовательно, она не заслуживает внимания Академии". А в 1834 г. в реакционном журнале Ф.Булгарина "Сын отечества" появился издевательский анонимный отзыв об этой работе. "Как можно подумать, чтобы г. Лобачевский, ординарный профессор математики написал с какой-нибудь серьезной целью книгу, которая немного бы принесла чести и последнему школьному учителю! Если не ученость, то по крайней мере здравый смысл должен иметь каждый учитель, а в новой геометрии нередко недостает и сего последнего", - писал неизвестный рецензент, укрывшийся за двумя буквами С.С.

Встретив непонимание и даже издевательство, Лобачевский не прекратил своих исследований. После работы 1829 - 1830 гг. "О начала геометрии" Лобачевский печатает в "Ученых записках": в 1835 г. "Воображаемую геометрию" в 1836 г. "Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам".

С 1835 по 1838 гг. он публикует свою наиболее обширную работу "Новые начала геометрии с полной теорией параллельных". Наконец, в 1840 г. выходят на немецком языке "Геометрические исследования по



теории параллельных", где содержится предельно ясное и лаконичное изложение его основных идей.

Эта мужественная борьба за научную истину резко отличает Лобачевского от других современников, приближавшихся тоже к открытию неевклидовой геометрии.

Замечательный венгерский математик Янош Больяи опубликовал на 3 года позже Лобачевского своё исследование "Аппендикс" - добавление к книге его отца. В этой работе он несколько с иной стороны подошел к тем же результатам, что и Лобачевский. Но не встретив одобрения и поддержки, он прекратил борьбу. Выдающийся немецкий математик Гаусс, как выяснилось из опубликованных посмертно его переписки, получил некоторые начальные соотношения новой геометрии, но, оберегая свой покой, а также, быть может, не будучи уверен в правильности и объективной значимости этих результатов, запретил своим корреспондентам какие-либо высказывания об его взглядах. Восхищаясь в частной переписке с друзьями геометрическими работами Лобачевского он ни одним словом не высказался о них публично.

Ни одного положительного отклика не получает Лобачевский, кроме единственного высказывания профессора механики Казанского университета П.И.Котельникова, который в актовой речи в 1842 г. отметил, что изумительный труд Лобачевского, построение новой геометрии на предположении, что сумма углов треугольника меньше двух прямых, рано или поздно найдет своих ценителей.

Многолетние плодотворные труды Лобачевского не могли получить положительной оценки у правительства Николая I. В 1846 г. Лобачевский оказался фактически отстраненным от работы в университете. Внешне он получил повышение - был назначен помощником попечителя (однако жалованья ему за эту работу не назначили), но при этом он лишился кафедры и ректорства.

Следует отметить, что менее чем за год до этого он был утвержден в шестой раз ректором университета на очередное четырехлетие. Вместе с тем более года он управлял Казанским учебным округом, заменив М.Н.Мусина-Пушкина, переведенного в Петербург. Указывая на эти свои служебные обязанности, Лобачевский незадолго до неожиданного предписания Министерства рекомендовал вместо себя на кафедру математики учителя Казанской гимназии А.Ф.Попова, защитившего докторскую диссертацию. Он считал необходимым поощрить молодого способного ученого и находил несправедливым занимать при таких обстоятельствах кафедру. Но, лишившись кафедры и ректорства и оказавшись в должности помощника попечителя, Лобачевский потерял возможность не только руководить университетом, но и вообще действительно участвовать в жизни университета.

Насильственное отстранение от деятельности, которой он посвятил свою жизнь, ухудшение материального положения, а затем и семейное несчастье (в 1852 г. у него умер старший сын) разрушающе отразилось на его здоровье; он сильно одряхлел и стал слепнуть. Но и лишенный зрения, Лобачевский не переставал приходить на экзамены, на торжественные собрания, присутствовал на ученых диспутах и не прекращал научных трудов.

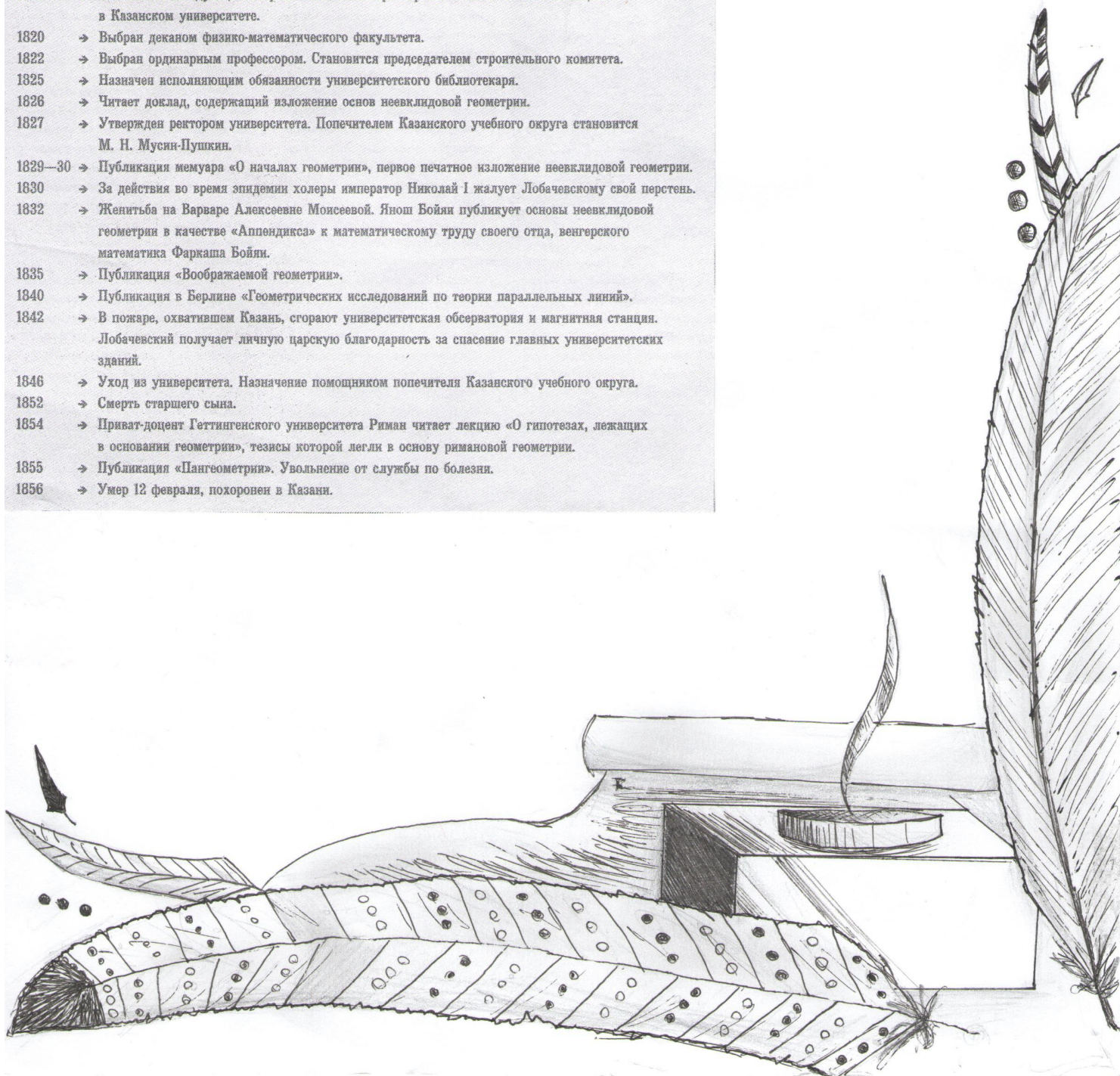
Непонимание значения его новой геометрии, жестокая неблагодарность современников, материальные невзгоды, семейное несчастье и, наконец, слепота не

сломили его мужественного духа. За год до смерти он закончил свой последний труд "Пангеометрия", диктуя его своим ученикам.

24 (12) февраля 1856 г. кончилась жизнь великого ученого, целиком отданная русской науке и Казанскому университету.

ХРОНОЛОГИЧЕСКАЯ ТАБЛИЦА

- 1792 → Родился 20 ноября (1 декабря) в Нижегородской губернии.
- 1802 → Поступает в Казанскую гимназию.
- 1804 → Открытие Казанского университета.
- 1807 → Переведен в Казанский университет. Смерть брата.
- 1811 → Получает степень магистра физико-математических наук. Рассуждение «Теория эллиптического движения небесных тел».
- 1814 → Получает степень адъюнкта физико-математических наук. Начало преподавательской деятельности в Казанском университете.
- 1816 → Утвержден экстраординарным профессором.
- 1819 → Становится заведующим астрономической обсерваторией. Начало «эпохи Магницкого» в Казанском университете.
- 1820 → Выбран деканом физико-математического факультета.
- 1822 → Выбран ординарным профессором. Становится председателем строительного комитета.
- 1825 → Назначен исполняющим обязанности университетского библиотекаря.
- 1826 → Читает доклад, содержащий изложение основ неевклидовой геометрии.
- 1827 → Утвержден ректором университета. Попечителем Казанского учебного округа становится М. Н. Мусин-Пушкин.
- 1829—30 → Публикация мемуара «О началах геометрии», первое печатное изложение неевклидовой геометрии.
- 1830 → За действия во время эпидемии холеры император Николай I жалует Лобачевскому свой перстень.
- 1832 → Женитьба на Варваре Алексеевне Мойсеевой. Янош Бойяи публикует основы неевклидовой геометрии в качестве «Аппендикса» к математическому труду своего отца, венгерского математика Фаркаша Бойяи.
- 1835 → Публикация «Воображаемой геометрии».
- 1840 → Публикация в Берлине «Геометрических исследований по теории параллельных линий».
- 1842 → В пожаре, охватившем Казань, сгорают университетская обсерватория и магнитная станция. Лобачевский получает личную царскую благодарность за спасение главных университетских зданий.
- 1846 → Уход из университета. Назначение помощником попечителя Казанского учебного округа.
- 1852 → Смерть старшего сына.
- 1854 → Приват-доцент Геттингенского университета Риман читает лекцию «О гипотезах, лежащих в основании геометрии», тезисы которой легли в основу римановой геометрии.
- 1855 → Публикация «Пангеометрии». Увольнение от службы по болезни.
- 1856 → Умер 12 февраля, похоронен в Казани.



Геометрия Лобачевского

Геометрия Лобачевского (гиперболическая геометрия) — одна из неевклидовых геометрий, геометрическая теория, основанная на тех же основных посылах, что и обычная евклидова геометрия, за исключением аксиомы о параллельных прямых, которая заменяется на аксиому о параллельных прямых Лобачевского.

Евклидова аксиома о параллельных (точнее, одно из эквивалентных ей утверждений) гласит:

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит не более одной прямой, лежащей с данной прямой в одной плоскости и не пересекающей её.

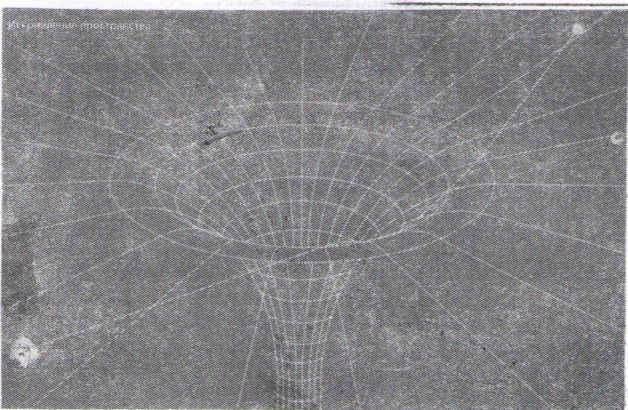
В геометрии Лобачевского, вместо неё принимается следующая аксиома:

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие её.

Широко распространено заблуждение, что в геометрии Лобачевского параллельные прямые пересекаются. Геометрия Лобачевского имеет обширные применения как в математике, так и в физике. Историческое и философское её значение состоит в том, что её построением Лобачевский показал возможность геометрии, отличной от евклидовой, что знаменовало новую эпоху в развитии геометрии, математики и науки вообще.

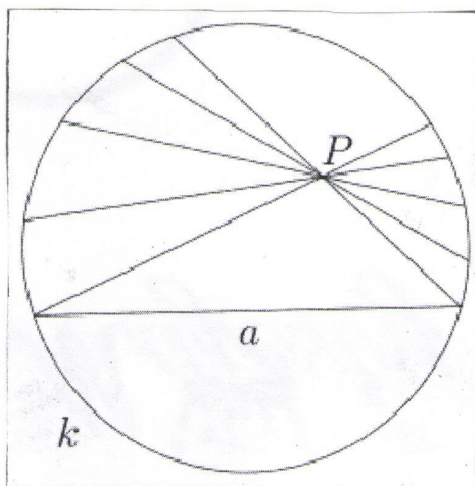
ПРОСТРАНСТВО ЛОБАЧЕВСКОГО

Влияние геометрии Лобачевского вышло далеко за пределы математической науки. Она нашла свое применение и в физике, и в объяснении законов мироздания, она давно сделалась неотъемлемой частью культуры и массового сознания. Не прошла даром и административная, просветительская работа ученого, сеявшего «разумное, доброе, вечное».

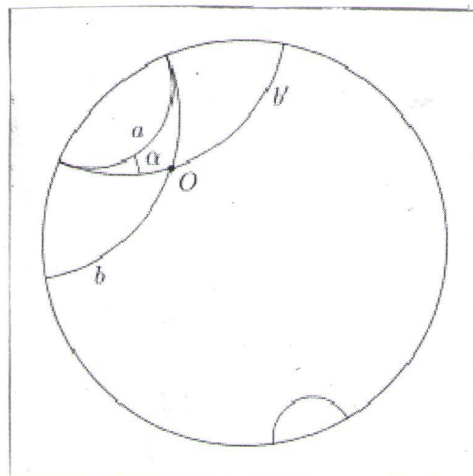


Итальянский математик Э. Бельтрами в 1868 году заметил, что геометрия на куске плоскости Лобачевского совпадает с геометрией на поверхностях постоянной отрицательной кривизны, простейший пример которых представляет псевдосфера. Если точкам и прямым на конечном куске плоскости Лобачевского сопоставлять точки и кратчайшие линии (геодезические) на псевдосфере и движению в плоскости Лобачевского сопоставлять перемещение фигуры по псевдосфере с изгибанием, то есть деформацией, сохраняющей длины, то всякой теореме геометрии Лобачевского будет отвечать факт, имеющий место на псевдосфере. При этом длины, углы, площади понимаются в смысле естественного измерения их на псевдосфере.

Модель Клейна



Модель Пуанкаре



Через точку P проходит бесконечно много «прямых», не пересекающих «прямой» a

В 1871 году Клейн предложил первую полноценную модель плоскости Лобачевского.

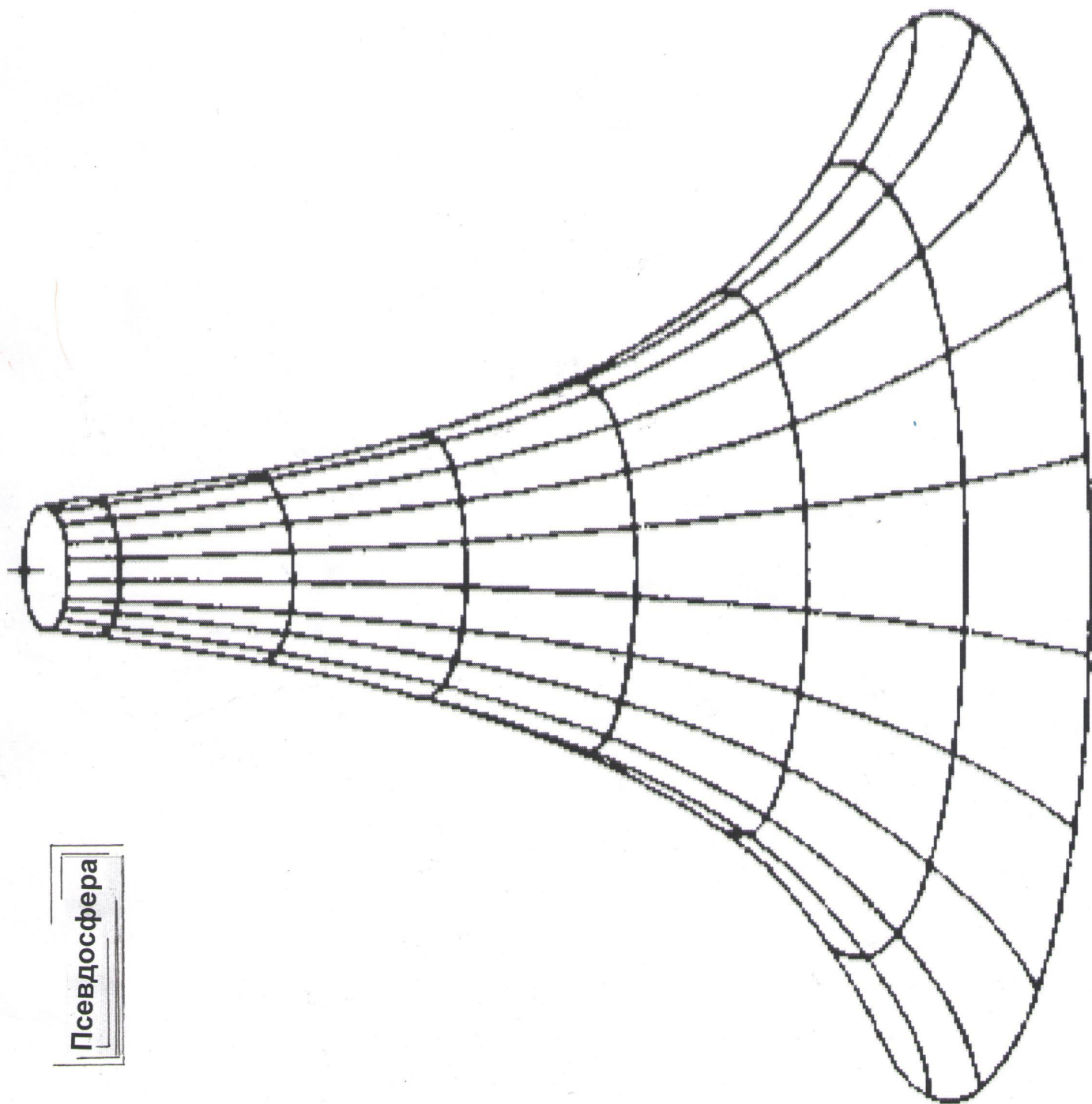
Плоскостью служит внутренность круга, прямой — хорда круга без концов, а точкой — точка внутри круга. «Движением» назовём любое преобразование круга в самого себя, которое переводит хорды в хорды. Соответственно, равными называются фигуры внутри круга, переводящиеся одна в другую такими преобразованиями. Тогда оказывается, что любой геометрический факт, описанный на таком языке, представляет теорему или аксиому геометрии Лобачевского. Иными словами, всякое утверждение геометрии Лобачевского на плоскости есть не что иное, как утверждение евклидовой геометрии, относящееся к фигурам внутри круга, лишь пересказанное в указанных терминах. Евклидова аксиома о параллельных здесь явно не выполняется.

Позже Пуанкаре, в связи с задачами теории функций комплексного переменного дал другую модель. За плоскость Лобачевского принимается внутренность круга, прямыми считаются дуги окружностей, перпендикулярных окружности данного круга, и его диаметры, движениями — преобразования, получаемые комбинациями инверсий относительно окружностей, дуги которых служат прямыми.

Поверхность постоянной отрицательной кривизны

Другое аналитическое определение геометрии Лобачевского состоит в том, что геометрия Лобачевского определяется как геометрия риманова пространства постоянной отрицательной кривизны. Это определение было фактически дано ещё в 1854 году Риманом и включало модель геометрии Лобачевского как геометрии на поверхностях постоянной кривизны. Однако Риман не связал прямо своих построений с геометрией Лобачевского, а его доклад, в котором он о них сообщил, не был понят и был опубликован лишь после его смерти (в 1868 году).

Псевдосфера





Модель псевдосферы Лобачевского

Заключение

Значение геометрии Лобачевского для космологии было выявлено А. А. Фридманом. В 1922 он нашел решение уравнения Эйнштейна, из которого следовало, что Вселенная расширяется с течением времени. Это заключение впоследствии было подтверждено наблюдениями Э. Хаббла (E. Hubble, 1929), обнаружившего разбегание удаленных туманностей. Метрика, найденная А. А. Фридманом, дает при фиксированном времени пространство Лобачевского. Пространство скоростей специальной теории относительности является пространством Лобачевского.

Геометрия Лобачевского с успехом используется при изучении столкновений элементарных частиц.

Зрительное (перцептивное) восприятие близких областей пространства человеком порождает эффект обратной перспективы, объясняемый тем, что геометрия этих областей перцептивного пространства близка к геометрии Лобачевского с радиусом кривизны около 15 м.

Создание геометрии Лобачевского явилось важным этапом в развитии учения о возможных свойствах пространства. Особенное значение это имело для оснований математики, т. к. принципы современного аксиоматич. метода вырабатывались в значительной степени благодаря появлению геометрии Лобачевского.

ИНТЕРЕСНЫЕ ФАКТЫ О...

НИКОЛАЙ ЛОБАЧЕВСКИЙ



1. Плохое поведение в гимназии чуть не сыграло злую шутку с Лобачевским. Он имел все шансы попасть в армию.
2. Учёный любил ухаживать за растениями в саду. Его «любимцами» были кедровые.
3. Лобачевский прекрасно владел даром убеждения. Он даже наставил на путь истинный одного из своих студентов.
4. В гимназии, где учился Николай, его недолюбливали.

Литература о Н.И. Лобачевском

1. Васильев А.В. *Николай Иванович Лобачевский*. - М.: Наука. 1992. - 229 с. (Научно-биографическая серия).
2. Норден А.П. *125 лет неевклидовой геометрии*. - Успехи математических наук, 1951. - 6, вып. 3 (48). - С.3 - 9.
3. Норден А.П. *Об изложении основных теорем геометрии Лобачевского*. - В сб.: Сто двадцать пять лет неевклидовой геометрии Лобачевского. - М.-Л.: Гостехиздат. 1952. - С.117 - 128.
4. Норден А.П. *Элементарное введение в геометрию Лобачевского*. - М.: Гостехиздат, 1953. - 248 с.
5. Норден А.П. *Гаусс и Лобачевский*. - Историко - математические исследования, 1956, вып. 9. - С.145 - 168.
6. Лаптев Б.Л. *Николай Иванович Лобачевский. 1792 - 1856*. - В сб.: Люди русской науки. Матем., мех., М., 1961. - С.76 - 93.
7. Лаптев Б.Л. *Великий русский математик (к 175-летию со дня рождения Н.И.Лобачевского)*. - Вестник высшей школы, 1967, 12. - С.62 - 70.
8. Лаптев Б.Л. *Николай Иванович Лобачевский*. - Казань, 1976. - 136 с.
9. Лаптев Б.Л. *Коперник геометрии*. - Наука и жизнь, 1976, N5. - С.38 - 42.
10. Лаптев Б.Л. *Геометрия Лобачевского, ее история и значение*. - М.: Знание (В серии "Новое в жизни, науке и технике", N9). 1976. - 36 с.
11. Лаптев Б.Л. *Н.И. Лобачевский и его геометрия*. - М.: Просвещение, 1976. - 112 с.
12. Александров П.С. *Николай Иванович Лобачевский*. "Квант". 1976. N2.
13. Норден А.П. *Великое открытие Лобачевского*. "Квант". 1976. N2.
14. Лаптев Б.Л. *Что читал Лобачевский?* - Казань. Изд-во Казан. ун-та; 1979. - 126 с.
15. Широков П.А. *Краткий очерк основ геометрии Лобачевского*. - 2-е изд. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. - 80 с.
16. Лаптев Б.Л. *Николай Иванович Лобачевский*. - В кн.: Рассказы о казанских уч. ных. - Казань: Таткнигоиздат, 1983. - С.5 - 19.
17. *Н.И. Лобачевский. К 200-летию*. (Авторы: Вишневский В.В., Писарева С.В.). - Казань. Изд-во Казан. ун-та, 1992.

